ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

I

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

ТОМ I

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

Перевод с латинского
Е. Л. ПАЦАНОВСКОГО
Вступительная статья
А. ШПАЙЗЕРА
Редакция перевода
И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Государственное издательство
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · 1961

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

«Введение в анализ бесконечных» Леонарда Эйлера в настоящем двухтомном издании впервые станет полностью доступным для нашего читателя: первое русское издание 1936 г. осталось незаконченным, вышел только первый том. Существует мнение, что второй том «Введения» (геометрический) уступает первому (аналитическому) по богатству оригинальными результатами, однако и он занимает почетное место среди классических произведений математической литературы, и математику ознакомление с «Введением в анализ» Эйлера в полном объеме даст очень много.

Когда Эйлер писал эту книгу, прошло уже целое столетие с тех пор, как Декарт (и Ферма) ввел в геометрию координатный метод. За это же столетие в науке вошло в обиход понятие функции, был накоплен обширный материал в итоге изучения как отдельных видов функций, так и ряда их общих свойств, был создан аппарат дифференциального и интегрального исчисления. Но только Эйлер смог свести все эти результаты воедино и, присоединив к ним свои многочисленные открытия, дать во «Введении» первые и образцовые курсы сразу двух дисциплин: собственно введения в анализ (понимая под этим изучение функций с помощью бесконечных процессов, обобщающих алгебраические) и аналитической геометрии. Содержание и значение этих творений Эйлера анализируются во вступительных статьях к соответствующим томам. Здесь достаточно указать, что эйлерово «Введение» справедливо признается наиболее значительным по своему историческому влиянию математическим трактатом нового времени. Для того, кто интересуется историей математических наук, для математика-педагога как средней, так и высшей школы, эта книга и сейчас дает немало материала для размышления и применения.

Многое во «Введении» покажется современному читателю близким и знакомым, потому что многое из него, чаще всего без ссылок, вошло неотъемлемой частью в учебную литературу вплоть до наших дней. «Заимствование — самый лестный вид оценки», как сказал один из историков науки... Но ничто не может заменить знакомства с оригиналом Эйлера, ибо только в оригинале можно оценить все достоинства изложения и почувствовать тот творческий дух, которым пронизано это удивительное создание великого ученого.

* * *

При подготовке к переизданию первого тома перевод и текст в целом был проверен И. Б. Погребысским. В качестве вступительной статьи (в переводе с немецкого И. Б. Погребысского) дано введение к этому тому, написанное одним из редакторов полного собрания сочинений Л. Эйлера швейцарским математиком и историком науки Андреасом Шпайзером.

Из особенностей обозначений Эйлера, вообще весьма близких к современным, сохранены следующие: мнимая единица обозначена $\sqrt{-1}$, а i означает бесконечность (infinitum); логарифм обозначен l; $*$ обозначает пропуск степени в многочлене, например

$$0=1-6x*+8x^3$$

означает

$$0=1-6x+0\cdot x^2+8x^3.$$

В первом издании первый том Introductio содержал еще посвящение парижскому академику Мэрану (I. I. Dortous de Mairan); здесь оно опущено, так как принадлежит не Эйлеру, а его издателю Буске (Bousquet).

* * *

Примечания редакторов первого тома «Введения» в издании Opera omnia отмечены буквами *А. К.* (А. Крацер) и *Ф. Р.* (Ф. Рудио). Примечания, отмеченные буквами *С. Л.*, принадлежат С. Я. Лурье, буквами *И. П.*—И. Б. Погребысскому.

О ПЕРВОМ ТОМЕ «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ» ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА[1])

Первая глава первого тома Введения начинается с определения постоянной величины, которая сохраняет свое значение в ходе вычисления, и величины переменной, которая все значения охватывает (in se complectitur). Функция — это произвольно составленное аналитическое выражение (expressio analytica quomodcunque composita ex quantitate variabili et quantitatibus constantibus). Функции разделяются на алгебраические и трансцендентные, а алгебраические — на рациональные и иррациональные. Иррациональные функции содержат знаки корней. Таким образом, Эйлер принимает, что все алгебраические уравнения могут быть сведены к «чистым» уравнениям, что, как известно, не имеет места. Рациональные функции разделяются на целые и дробные. Вслед за этим определяются многозначные функции, причем неявно предполагается справедливость основной теоремы алгебры, далее — функции обратные, четные и нечетные, подобные (similes, § 26).

Следующие две главы содержат преобразования функций, а именно, гл. II— тождественные преобразования, гл. III—введение новых переменных. Сначала Эйлер показывает, что комплексные линейные множители действительной целой рациональной функции появляются обязательно сопряженными парами (§ 31, 150—154). Функция нечетной степени имеет по крайней мере один действительный корень, уравнение вида $z^{2n}+\ldots+A=0$ имеет не менее двух таких корней. Затем рассматривается разложение рациональной функции на частные дроби, что иллюстрируется несколькими примерами, и при этом принимаются во внимание лишь действительные корни знаменателя.

Глава III содержит рационализацию или униформизацию алгебраических функций (этой проблемой Эйлер особенно занимался в арифметической теории диофантовых уравнений). Он находит большое число алгебраических уравнений, род которых в смысле Римана равен нулю,— ведь именно такие уравнения являются здесь предметом исследования. Рационализируются функции $y=(a+bx)^r$ при рациональном r, далее $y=f^r(x)$, где $f(x)$ дробно-линейная функция от x и $y=p+qx+rx^2$. Затем указываются три приема для униформизации уравнения $ax^\alpha+by^\beta+cx^\gamma y^\delta=0$. Но при этом показатели должны удовлетворять определенным условиям, и этот метод обобщается и иллюстрируется примерами. Вслед за этим униформизируется наиболее общее уравнение второй степени в двух переменных, а также сумма двух однородных функций разных порядков.

---

[1]) Из вводной статьи А. Шпайзера к т. 9, серии 1 Leonhardi Euleri, Opera omnia, Genevae, 1945, стр. VIII—XIX.

С главы IV начинается рассмотрение бесконечных рядов, что собственно и представляет предмет первой части «Введения». Этому необходимо предпослать некоторые принципиальные замечания. Эйлер рассматривает только такие ряды, которые заданы некоторым законом, то есть ряды, которые имеют «общий член». При этом можно различать две трактовки — арифметическую и алгебраическую. При арифметической члены ряда являются числами и мы требуем сходимости ряда, тогда как при алгебраической трактовке знаки $+$ и $-$ являются только символами объединения и сходимость не играет никакой роли. Подобную трактовку мы имеем, например, в теории групп, где складываются «элементы», равно как в теории множеств и в формальной логике. Как раз такая трактовка больше всего и занимает Эйлера.

Если, к примеру, рассматривается ряд $S=1-1+1-1+\ldots$, то мы никогда не придем к иному значению, чем $\frac{1}{2}$, при условии, что учитывается симметрия ряда, потому что эта симметрия выражается уравнением $S=1-S$. Впрочем, функция $y=1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8+\ldots$ тоже дает при $x=1$ указанный ряд, но без соответствующей симметрии. Эйлер записал бы его в виде $1+0-1+1+0-1+\ldots$ и вычислил бы его сумму как $\frac{2}{3}$.

Стало быть, с помощью разложения в ряд закон задания функции отображается в закон членов ряда, и это проливает свет на глубокие свойства функции. Так, например, число π находится в таинственной связи с нечетными числами; $\log 2$—со всеми числами; e^x, $\sin x$, $\cos x$ и интегральный логарифм — с факториалами. В своих необозримых экспедициях в область рядов Эйлер сделал решающее открытие, что как раз расходящиеся ряды дают самое мощное средство для обнаружения непредвиденных фактов. Путь, ведущий через расходящееся, еще более плодотворен, чем путь, ведущий через комплексное в теории функций. Так, Эйлер нашел на этом пути разложение гамма-функции в произведение, а затем функциональные уравнения этой функции и дзета-функции. Последнее уравнение, которое является одним из самых замечательных открытий, сделанных в математике, он не мог доказать. Доказательство этой знаменитой гипотезы впервые удалось дать Шлемильху, который одновременно показал, как преобразуется ψ-функция, и, в связи с работой Шлемильха, Риману. Риман выявил то обстоятельство, что при установлении формулы Эйлера мы имеем дело с аналитическим продолжением и что обе формулы Шлемильха по сути представляют одно и то же.

Конечно, Эйлер хорошо знал по собственному опыту, что пользоваться расходящимися рядами трудно и опасно, и при случае он говорил об этом; приходилось ему постоянно выслушивать это и от других. То, что вопреки всему он отваживался на такое дело, является достижением совершенно особого рода, и оно было ему по душе. Еще до того, как было напечатано Введение (1746), он написал работу (Opera omnia, серия 1, т. 14, стр. 585) о нигде не сходящемся ряде

$$1-1!\,x+2!\,x^2-3!\,x^3+\ldots$$

и показал, что различные методы суммирования, разностное исчисление-дифференциальное исчисление, разложение в цепную дробь всегда приводят к одному и тому же значению этого ряда при $x=1$. В наши времена (первая половина двадцатого века) подобные проблемы возникли в теории рядов Фурье. Так, известно, что каждая непрерывная функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье. Если соответствующий ряд сходится равномерно, он дает функцию, но в общем случае он не будет сходиться. Тогда «отыскание первообразной функции» представляет задачу, которая примыкает к постановке вопроса у Эйлера. Что вообще имеют смысл только сходящиеся ряды—такое утверждение не математично, наоборот, надо было снова взяться за большую проблему Эйлера.

В IV главе Эйлер начинает с того, что несомненно каждую функцию можно разложить в ряд вида

$$Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\ \ldots,$$

где показатели α, β, γ, δ, ... обозначают какие угодно числа. Затем следует разложение в ряды рациональных функций; идя от одного примера к другому, большей трудности, Эйлер, наконец, доходит до разложения общей рациональной дроби, причем коэффициенты степенного ряда определяются рекуррентным соотношением. Особенно он исследует те случаи, когда знаменатель представляет собою степень. Далее, вводится без доказательства общий биномиальный ряд и излагается общая полиномиальная теорема.

Параграфы 64—67 несколько выходят из намеченных Эйлером рамок, поскольку в них предполагается известным учение о разностях, которое развито лишь в гл. I «Дифференциального исчисления». Замечание в § 67 надо истолковать следующим образом. Пусть A_1, A_2, A_3, ... образуют такой ряд, что их $(n-1)$-е разности постоянны. Тогда без труда можно доказать, что

$$A_k-\binom{n}{1}A_{k+1}+\binom{n}{2}A_{k+2}-\ \ldots\ +(-1)^n A_{k+n}=0.$$

Если уже m-е разности постоянны $(m<n-1)$, то последнее равенство, разумеется, остается в силе. Это соображение применяется к ряду a^m+ $+(a+b)^m+\ \ldots\ +(a+nb)^m$, у которого m-е разности постоянны. Мы имеем здесь дело с одним из тех мест, где Эйлер хочет побудить читателя задуматься над более сложными вопросами. Бросается в глаза алгебраический (не арифметический) характер этих исследований, при которых рассматривается знаменатель вида $1-\alpha x$ при $\alpha=x=1$. Рассуждения Эйлера безупречны.

Глава V посвящена однородным функциям—целым, дробным и алгебраическим. Между прочим, тут показано, что целая функция нескольких переменных не обязательно разлагается на множители. В главе VI вводятся экспоненциальная функция и логарифмы. Сначала a^x определяется для любого положительного a, затем вводится логарифм как обратная функция для $y=a^x$. Пусть $\log y=z$ и $\log v=x$, тогда $\log\sqrt{vy}=$ $=\frac{x+z}{2}$. С помощью этой формулы $\log 5$ при основании 10 вычисляется с шестью знаками (§ 106). Несколько примеров показывают полезность этих функций.

В гл. VII экспоненциальная функция и логарифмическая раскладываются в ряды. Пусть ω есть малое число. Тогда имеем $a^{\omega}=1+k\omega$, поэтому $a^{h\omega}=(1+k\omega)^h$, и если устремить h к бесконечности, а ω, напротив, устремить к нулю, то путем применения биномиального ряда получаем экспоненциальный ряд, расположенный по возрастающим степеням kz, где $z=\omega h$.

Теперь положим $a^{\omega h}=(1+k\omega)^h=1+x$. Тогда будем иметь $\log(1+x)=$ $=h\omega$, где $\log$ обозначает логарифм при основании a. С другой стороны, мы получаем $k\omega = (1+x)^{\frac{1}{h}} - 1$, откуда $\log(1+x) = h\omega = \frac{h}{k}[(1+x)^{1/h} - 1]$. Если теперь развернуть последнее выражение в биномиальный ряд и устремить h к бесконечности, то получим ряд

$$\log(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right).$$

Для выяснения того, что собою представляет k, подставим $1+x=a$ и выберем в качестве основания a, так что $\log a$ становится единицей; тогда находим, что

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \ldots$$

Если, в частности, выбрать $k=1$, то в качестве основания имеем e, и ряд становится рядом для натуральных логарифмов.

Глава VIII трактует о круговых трансцендентных функциях. Сначала приводится π с 127 знаками. Затем полностью перечисляются все свойства симметрии у синуса и косинуса. Показывается, что последовательность $\sin(ny+z)$ для целочисленного n образует рекуррентный ряд, поскольку она возникает из знаменателя $1 - 2\cos y \cdot x + x^2$. Затем идут некоторые известные формулы для половинных углов. Разложение в ряд для синуса и косинуса выводится из формулы Моавра путем предельного перехода и дается с 28 знаками после запятой для угла $\frac{m}{n}\,90°$. Ряды для тангенса и котангенса вычисляются с 13 знаками. В § 138 содержатся знаменитые эйлеровы формулы

$$\cos v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \quad \text{и} \quad \sin v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ряд для $\operatorname{arctg} x$ выводится из ряда для $\log\frac{1+x}{1-x}$ с помощью перехода к мнимым числам.

В главе IX формула Моавра применяется к разложению на множители $a^n + z^n$. Таким образом, по существу вопрос состоит здесь в построении корней из единицы. Замечателен здесь переход к бесконечности. А именно, имеем $e^x = \left(1 + \frac{x}{h}\right)^h$ для бесконечного h. Поэтому удается разложить $e^x - 1$ на множители второй степени вида

$$\left(1+\frac{x}{h}\right)^2 - 2\left(1+\frac{x}{h}\right)\cos\frac{2k}{h}\pi + 1,$$

где k пробегает все целые числа. Отсюда получаются разложения в произведения как для $e^x - 1$, так и для $e^x \pm e^{-x}$. С помощью перехода к мнимым числам получаются произведения

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots,$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots$$

Эйлер хорошо знал, что эти выводы нуждаются еще в дополнении, и он был в состоянии это сделать, как показывает его трактовка биномиального ряда (об этом см. предисловие Фабера к т. 16 серии 1 Opera omnia). Но указанный выше вывод выявляет сущность рассматриваемых функций, их «метафизику». Глава заканчивается новыми элегантными разложениями в произведение, в частности, для функций

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(g \pm v)}{\cos\frac{1}{2}g} \quad \text{и} \quad \frac{\sin\frac{1}{2}(g \pm v)}{\sin\frac{1}{2}g}.$$

В главе X, которая находится в самой тесной связи с XV главой, рассматривается дзета-функция. Слава Введения прежде всего основана на этих исследованиях. Сначала развертывается в ряд произведение $(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)\ldots$ и с помощью ньютоновых формул определяются суммы степеней $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Из разложения в произведение $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ получаются, таким образом, значения $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6), \ldots$, где

$$\zeta(x)=\frac{1}{1^x}+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ \ldots$$

Упомянутые в конце предыдущего абзаца разложения в произведение дают для тангенса и котангенса представление в виде сумм. Здесь нет надобности подробнее останавливаться на значении этих представлений как первого примера разложения мероморфных функций на частные дроби.

Из этих рядов получаются суммы более общих дзета-функций. В частности, строятся ряды из обратных нечетных чисел, причем знаки определяются по вычетам (mod 16). По четыре вычета получают знак $+$, остальные четыре берутся со знаком $-$. Следующие случаи рассматриваются в § 179 и 180: со знаком $+$ берутся вычеты

$$(1,\ 3,\ 9,\ 11),\quad (1,\ 5,\ 9,\ 13),\quad (1,\ 3,\ 5,\ 7),$$
$$(1,\ 7,\ 11,\ 13),\quad (1,\ 3,\ 7,\ 11),\quad (1,\ 5,\ 7,\ 13),$$
$$(1,\ 3,\ 5,\ 9),\quad (1,\ 9,\ 11,\ 13).$$

Заметим еще в связи с гл. XV, что только две первые комбинации (mod 16) образуют подгруппу мультипликативной группы вычетов, то есть только они дают так называемый характер группы вычетов (mod 16), которая, как известно, является абелевой и принадлежит типу (2, 4). В частности, не хватает третьей подгруппы порядка 4, которая состоит из вычетов 1, 7, 9, 15.

В XI главе разложение в произведение синуса и косинуса непосредственно применяется для вывода представления π по Валлису и для развертывания в произведение результатов деления на синус и косинус. Разложение в произведение для синуса и косинуса дает для $\log\sin x$ и $\log\cos x$ представление в виде суммы, и с помощью разложения отдельных членов этих рядов по степеням x получаются для указанных функций степенные ряды, которые можно записать, используя дзета-функцию, в следующем виде (§ 192):

$$\log\sin\frac{m}{2n}\pi=\log m+\log(2n-m)+\log(2n+m)-3\log n+\log\pi-\log 8-$$
$$-\frac{m^2}{n^2 2^2}(\zeta(2)-1)-\frac{m^4}{2n^4 2^4}(\zeta(4)-1)-\frac{m^6}{3n^6 2^6}(\zeta(6)-1)-\ldots,$$

$$\log\cos\frac{m}{n}\pi=\log(n-m)+\log(n+m)-2\log n-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7^2}+\ \ldots\right)-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ \ldots\right)-\ \ldots$$

Эйлер приводит эти ряды с числовыми коэффициентами, вычисленными с 20 знаками, а также дает ряды для бригговых логарифмов, вычисляя коэффициенты с 15 знаками. В заключение указывается еще ряд для тангенса и котангенса, находящийся в теснейшей связи с предшествующими.

Глава XII дает в вещественном виде разложение на частные дроби для простых и кратных комплексных корней знаменателя.

Глава XIII начинается с разложения в ряд рациональной функции, что уже рассматривалось в IV гл.; Эйлер делает замечание, что результат должен быть таким же, какой получается, если сначала разложить рациональную функцию на частные дроби, развернуть каждую частную дробь в геометрический ряд и эти ряды сложить. Таким образом, полностью разъясняется природа рекуррентных рядов с многочленной шкалой. Также полностью рассмотрен в вещественном виде случай пар комплексно сопряженных корней, что пояснено примерами. Особого разъяснения требуют следующие за этим § 226—230, так как они, очевидно, задуманы как загадка для читателя и должны его побудить к более тонким исследованиям.

Пусть задана двучленная возвратная шкала $(\alpha, -\beta)$, так что члены A_0, A_1, A_2, ... определяются следующими уравнениями:

$$A_2 = \alpha A_1 - \beta A_0, \quad A_3 = \alpha A_2 - \beta A_1, \quad \ldots, \quad A_{n+2} = \alpha A_{n+1} - \beta A_n, \quad \ldots$$

Если положить $1 - \alpha z + \beta z^2 = (1 - pz)(1 - qz)$, то согласно вышеуказанному получаем, что $A_n = \mathfrak{A} p^n + \mathfrak{B} q^n$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ определяются по двум начальным членам A_0 и A_1, которые могут быть выбраны произвольно. Теперь введем следующие обозначения для матриц:

$$\begin{pmatrix} A_n & A_{n+1} \\ A_{n+1} & A_{n+2} \end{pmatrix} = M(n) \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = T,$$

причем n пробегает целые числа 0, 1, 2, ... Закон образования величин A выразится теперь формулой $M(n)\,T = M(n+1)$. Если вычислить определители в уравнении $M(0)\,T^n = M(n)$, то получим $(A_0A_2 - A_1^2)\,\beta^n = (A_nA_{n+2} - A_{n+1}^2)$. Если же здесь выразить A_2 и A_{n+2} через два предшествующих члена, то получается формула, приведенная в § 227. Дробь в левой части этой формулы представляет не что иное, как частное от деления двух определителей: $(Q^2 - PR)/(B^2 - AC)$.

Положим теперь, что A_0, A_1, A_2, A_n, A_{n+1}, A_{n+2} известны. Очевидно, тогда можно будет с помощью уравнения $M(0)\,T^n = M(n)$ выразить матрицу T^n через эти шесть величин, стало быть, уже через четыре величины A_0, A_1, A_n, A_{n+1}. Мы получаем как раз $T^n = M(0)^{-1} M(n)$, что можно вычислить без труда. Тем самым мы оказываемся в состоянии вычислить через те же величины и $M(2n)$. А именно, находим, что $M(n)\,T^n = M(2n)$, где слева уже все известно. Это и составляет содержание формул для X, Y и Z в § 228 и 229. Конечно, формула, приведенная в § 230, тоже представляет собою соотношение между определителями. Надо только рассмотреть трехчленную шкалу и использовать следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_2 & A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & +\gamma \\ 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n & A_{n+1} & A_{n+2} \\ A_{n+1} & A_{n+2} & A_{n+3} \\ A_{n+2} & A_{n+3} & A_{n+4} \end{pmatrix}.$$

Здесь надо положить

$$A_{n+3}=\alpha A_{n+2}-\beta\ A_{n+1}+\gamma A_n,$$

затем, итерируя,

$$A_{n+4}=(\alpha^2-\beta)A_{n+2}+(\gamma-\alpha\beta)A_{n+1}+\alpha\gamma A_n,$$

после чего надо вычислить определители.

Раз сумма любого рекуррентного ряда представляется в виде рациональной функции по его шкале и первым членам, то можно и частичные суммы представить в таком же виде. Для этого нужно только просуммировать остаток ряда, а он ведь является рекуррентным рядом с той же шкалою, только с новыми начальными членами. Разность сумм полного ряда и остаточного дает сумму частичного ряда. С этими результатами следует сопоставить работу 281 (по списку Энестрема) Specimen algorithmi singularis, Leonhardi Euleri, Opera omnia, серия 1, т. 15, стр. 31—49, а также замечания в предисловии к т. 16, стр. XCVII.

Те формулы приведения, которые указаны в VIII главе для $\sin(nx+y)$, в следующей XIV главе применяются для вычисления $\sin nx$. Если принять в формуле $\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$, что $a=(n+1)z$ и $b=(n-1)z$, то получаем

$$\sin(n+1)z=2\sin nz\cos z-\sin(n-1)z,$$

и эта формула действительно дает для последовательности $\sin z$, $\sin 2z$, $\sin 3z$, ... возвратную шкалу $2\cos z$, -1. Отсюда вычисляется общее выражение для $\sin nz$, при этом и для нечетных кратных z, когда в него входит только $\sin z$, а не $\cos z$. Последнее выражение дает уравнение n-й степени для $\sin x$, когда известен $\sin nx$, то есть уравнение деления аргумента. Для суммы и произведения корней этого уравнения получаются простые выражения. Соответствующим образом $\operatorname{tg} nz$ и $\operatorname{ctg} nz$ тоже выражаются рационально через $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$. Затем находится сумма ряда

$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\sin(a+3b)+\ldots,$$

так как его члены образуют рекуррентный ряд со шкалою $-2\cos b$, 1. В заключение функции $\sin^n z$ и $\cos^n z$ разворачиваются в ряды Фурье.

Глава XV является продолжением гл. X. Для эйлеровой трактовки ряда характерна следующая формула:

$$(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)\ldots=1+2+3+5+6+7+10+11+ \\ +13+14+15+17+\ldots$$

Здесь, конечно, и мысли нет о сходимости, и можно даже сказать, что произведения и ряды не мыслятся как законченные бесконечные, а только как конечные или сколь угодно большие: если слева взять достаточно много множителей, то при вычислении согласно дистрибутивному закону мы получим свободные от квадратов числа по одному разу и сколь угодно далекие.

Затем следует разложение дзета-функции в бесконечное произведение по простым числам, а именно, сначала

$\left(1+\frac{1}{2^z}\right)\left(1+\frac{1}{3^z}\right)\left(1+\frac{1}{5^z}\right)\ldots=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{6^z}+\ldots$ (все свободные от квадратов числа) и далее, после некоторой подготовки,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^z}\right)\left(1-\frac{1}{3^z}\right)\left(1-\frac{1}{5^z}\right)\left(1-\frac{1}{7^z}\right)\ldots}=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\ldots$$

Сразу же вычисляются и обратные значения, которые приводят к подобным же рядам, только с переменами знака. Здесь нет надобности входить в рассмотрение большого числа рядов, которые исследуются далее. Отметим только в качестве примера вычислительного гения Эйлера его суммирование ряда

$$\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{7^z}+\frac{1}{11^z}+\ \ldots$$

для обратных квадратов простых чисел — с 15-ю знаками. При желании провести вычисление непосредственно надо было бы иметь простые числа примерно до ста миллиардов. Но мы положим

$$S(n)=\Sigma\,\frac{1}{p^{2n}}\qquad (p=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \ldots)$$

и используем то обстоятельство, что значения дзета-функции для четных чисел известны. Из разложения в произведение получаем, что

$$\log\zeta(2n)=S(n)+\frac{1}{2}S(2n)+\frac{1}{3}S(3n)+\frac{1}{4}S(4n)+\ \ldots$$

Мы хотим найти $S(1)$, и можно использовать эту формулу, если мы знаем S для больших значений n. Теперь Эйлер еще раз применяет дзета-функцию, а именно, он сначала вычитает с помощью S те члены, у которых в знаменателе простые числа, из оставшегося ряда он вычитает четные члены, из того, что осталось, — те члены, которые делятся на 3. Так получается формула

$$S(n)=(\zeta(2n)-1)\left[1-\frac{1}{2^{2n}}\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\right]+\frac{1}{6^{2n}}-\frac{1}{25^{2n}}-\frac{1}{35^{2n}}-\frac{1}{49^{2n}}-\ \ldots,$$

где справа в знаменателях следуют все взаимно простые с 6 составные числа. По этой формуле можно без труда вычислить $S(n)$ для $n=6,\ 7,\ 8,\ \ldots$ с 15 знаками, так как отрицательными членами можно пренебречь. Теперь привлекается еще ряд для $\log\zeta(2n)$.

Выпишем его для $n=5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$:

$$\log\zeta(10)=S(5)+\frac{1}{2}S(10)+\frac{1}{3}S(15)+\ldots$$
$$\log\zeta(8)=S(4)+\frac{1}{2}S(8)+\frac{1}{3}S(12)+\ldots$$
$$\log\zeta(6)=S(3)+\frac{1}{2}S(6)+\frac{1}{3}S(9)+\frac{1}{4}S(12)+\ldots$$
$$\log\zeta(4)=S(2)+\frac{1}{2}S(4)+\frac{1}{3}S(6)+\frac{1}{4}S(8)+\frac{1}{5}S(10)+\ldots$$
$$\log\zeta(2)=S(1)+\frac{1}{2}S(2)+\frac{1}{3}S(3)+\frac{1}{4}S(4)+\frac{1}{5}S(5)+\ldots$$

Так как левые части известны, можно таким образом последовательно вычислять S. В частности, для $S(1)$ получается такое значение: 0,45224 74200 41056; впрочем, у Эйлера оно дано лишь с 12 правильными знаками. Дальнейшие разложения в произведение имеем в § 283 и след. Между прочим, оказывается, что

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\ldots=\left(\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\ldots\right)^{-1},$$

где справа стоят все нечетные простые числа, притом со знаком $+$, если они вида $4k+3$ и со знаком $-$, если они вида $4k+1$. Совершенно не очевидно, что это разложение остается в силе и для $n=1$, так как произведение сходится только условно, когда оно вообще сходится, и по известному доказательству Дирихле любое положительное число может быть его пределом при перестановке множителей. И вовсе не подразумевается, что при размещении множителей по величине простых чисел получается как раз значение ряда Лейбница. Однако формула

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdots$$

верна. Ср. предисловие к 16 тому первой серии (отдел II) Opera omnia, стр. LXXIV и след. и E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, т. 2, стр. 673 и след. Многие другие произведения у Эйлера выведены с помощью формулы Валлиса. В качестве примера укажем на последнюю формулу § 295:

$$1=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{11}{12}\cdots$$

Здесь отдельные дроби получаются, когда выписываем нечетные простые числа в натуральном порядке следования, затем разлагаем $p=2n+1$ на два слагаемых n и $n+1$ и ставим n в числителе, если это число нечетно или равно удвоенному нечетному числу; в этом случае $n+1$ попадает в знаменатель. Если же n делится на 4, то его ставят в знаменателе, а $n+1$ — в числителе.

Когда Эйлер в § 296 замечает, что таким же образом разлагаются на множители ряды, приведенные в § 180 (см. замечания к гл. X), он не прав. Для того чтобы этот прием был применим, нужно, чтобы комбинация знаков соответствовала характеру (mod 16).

Заметим еще, что из сходимости произведения для $\frac{\pi}{4}$ следует расходимость ряда обратных значений простых чисел вида $4n+1$ и $4n+3$, то есть то, что в обеих этих прогрессиях содержится бесконечно много простых чисел. Это следствие Эйлер выводит лишь в работе 596 (по списку Энестрема; см. Opera omnia, серия 1, т. 4, стр. 147). Там он утверждает, что это справедливо и относительно других «видов» простых чисел и для разъяснения приводит арифметическую прогрессию $100n+1$, — и в этом случае ряд обратных значений простых чисел такого вида расходится. Доказательства такой теоремы он не указывает. Во всяком случае «виды» обозначают арифметические прогрессии $an+b$, где a и b взаимно просты.

Глава XVI одна из самых знаменитых, в ней рассматривается разбиение чисел (на слагаемые — partitio numerorum). Сведения об истории вопроса даны в примечании Рудио. Не буду входить в обсуждение этой главы, так как все необходимое сказано в предисловиях к тт. 2, 3, 4 серии 1 Opera omnia.

В XVII главе речь идет о методе Даниила Бернулли для вычисления наибольшего или наименьшего корня уравнения по суммам степеней корней. Эти суммы вычисляются по Ньютону с помощью рекуррентных рядов, и наибольший (по модулю) корень, если он вещественен и единственный, определяется как предел отношения сумм $(n+1)$-х и n-х степеней. Когда наибольшими корнями являются p и $-p$, надо принимать во внимание лишь суммы четных степеней и при этом получаем значение для p^2. Затем Эйлер исследует также тот случай, когда наибольшим модулем обладает пара комплексно сопряженных корней. Если мы достаточно далеко продвинулись в последовательности сумм степеней, то их дальнейшее поведение определяется только этими двумя корнями. Допустим, что такие корни удовлетворяют уравнению

$$z^2-2pz\cos\varphi+p^2=0,$$

тогда для достаточно большого n имеем

$$S(n+2)-2p\cos\varphi\cdot S(n+1)+p^2S(n)=0,$$

где $S(n)$ обозначает сумму n-х степеней корней.

В основе рассуждений в § 351 и 352 лежит тот же формализм, что и в основе рассуждений в гл. XIII. А именно, пусть P, Q, R, S суть четыре последовательные суммы степеней. Тогда справедлива матричная формула

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -p^2 \\ 1 & 2p\cos\varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q & R \\ R & S \end{pmatrix}.$$

Если теперь выделить второй множитель слева, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & -p^2 \\ 1 & 2p\cos\varphi \end{pmatrix}=\frac{1}{PR-Q^2}\begin{pmatrix} R & -Q \\ -Q & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & R \\ R & S \end{pmatrix},$$

откуда для p и для $\cos\varphi$ получаются формулы § 351.

Характерен для Эйлера последний параграф этой главы, где он вычисляет описанным методом наименьший корень уравнения $\frac{1}{2}=\sin z$, стало быть $\frac{\pi}{6}$, и очень быстро получает его значение с четырьмя точными знаками после запятой.

Глава XVIII представляет великолепную маленькую монографию о цепных дробях, в которой особое значение придается преобразованию рядов в цепные дроби. Впрочем, эти дроби применяются лишь к решению квадратных уравнений. Числа e и π приводятся только в примерах.

Если этот обзор содержания донесет аромат этой тонкой математической книги и побудит читателя заняться ею, я буду доволен. Книга эта — полная противоположность обычным школьным учебникам и могла бы служить образцом для коренного преобразования преподавания математики в гимназиях. Как замечательно, даже таинственно разложение π в произведение по простым числам! Как восхитительны эксперименты из partitio numerorum! Но еще немало протечет воды в Рейне, пока школа, наконец, обнаружит, что математика может быть гуманитарной наукой и что ученики могут так же хорошо понимать Эйлера, как Платона и Гете[1]).

А. Шпайзер

[1]) В последнем абзаце статьи речь идет о средней школе родины автора — Швейцарии. [*И. П.*]

БИБЛИОГРАФИЯ ИЗДАНИЙ «ВВЕДЕНИЯ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ»

Introductio in analysin infinitorum. Auctore Leonhardo Eulero, professore regio Berolinensi, et academiae imperialis scientiarum Petropolitanae socio. Tomus primus, гравюра+портрет (Мэрана)+(2)+XVI+320 стр.+1 таблица. Tomus secundus, (2)+ +398+(1) стр.+40 табл., Lausannae, apud Marcum-Michaelem Bousquet et socios, 1748,4°.

П о с л е д у ю щ и е и з д а н и я и п е р е в о д ы:

1. Издание с новым титульным листом. Lausannae, apud Julium Henricum Pott et soc., 1783.

Это точное воспроизведение 1-го издания; недостает только гравюры и портрета Мэрана.

2. Editio nova. Tomus primus, XVI+320 стр. Tomus secundus, (2)+398 стр.+ +16 табл. Lugduni, apud Bernuset, Dalamolliere, Faldue et soc., 1797, 4°.

3. Introduction a l'analyse des infiniment petits de M. Euler. Traduite du latin. Premiére partie. Par. M. Pezzi. Précédée de l'éloge de M. Euler prononcé a la rentrée de l'académie royale des sciences le 6 février 1785 par M. le marquis de Condorcet. Портрет + 6 + IV+44+XII+346+(2) стр. A Strasbourg aux dépens de la librairie académique 1786, 8°. Вторая часть должна была появиться в переводе Крампа, но не вышла в свет.

4. Introduction à l'analyse infinitésimale par Léonard Euler; traduite du latin en français, avec des notes et des éclaircissements, par J. B. Labey. Tome premier, XIV+ +(2)+364 стр. Tome second, (12)+424 стр.+16 табл. A Paris, chez Barrois, ainé, l'an IV (1796), et l'an V (1797), 4°.

5. Издание с новым титульным листом. Paris, Bachelier, 1835.

6. Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von Joh. Andr. Chr. Michelsen. Erstes Buch, XXIV+626+(3) стр.+2 табл. Zweites Buch (VI)+578 стр.+ +8 табл. Berlin, bey Carl Matzdorff 1788,8°.— Существуют экземпляры с надписью на титульном листе: «Berlin, bey Sigismund Friedrich Hesse, 1788». В 1791 г. Михельсон выпустил еще «третью книгу» «Introductio in analysin infinitorum» с подзаголовком «Теория уравнений». Однако первый заголовок только сбивает с толку читателя, так как эта книга не имеет ничего общего с «Introductio», а представляет собой собрание, составленное из переводов алгебраических работ Эйлера [«De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio» (*Comment. acad. sc. Petrop.*, 6, 1732/3, 1738, стр. 216) «De resolutione aequationum cuiusvis gradus» (Novi comment. acad. sc. Petrop., 6, 1762/3, 1764, стр. 70[1])] и Лагранжа.

7. Neue unveränderte berichtigte Auflage. Erstes Buch, XVI+456 стр.+1 табл. Zweites Buch, VIII+392 стр.+8 табл. Berlin, Reimer, 1835 und 1836.

8. Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Von Leonhard Euler, Erster Teil. Ins Deutsche übertragen von H. Maser. X+(1)+319 стр., Berlin, Springer, 1885,8°.

Продолжения не было.

---

[1]) Эти работы напечатаны теперь в книге L e o n h a r d i E u l e r i, Opera omnia, серия 1, том 6, стр. 1 и 170.

9. Leonhardi Euleri Opera omnia sub auspiciis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae edenda curaverunt Ferdinand Rudio, Adolf Krazer, Andreas Speiser, Louis Gustave du Pasquier. Series prima. Opera mathematica. Volumen octavum. Leonhardi Euleri Introductio in analysin infinitorum. Tomus primus. Adiecta est Euleri effigies ad imaginem ab E. Handmann pictam expressa. Ediderunt Adolf Krazer et Ferdinand Rudio. Портрет+XI+2 гравюры+392 стр., Lipsiae et Berolini, Typis et in aedibus B. G. Teubneri, 1922.

10. Классики естествознания. Леонард Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, т. 1. Перевод с латинского Е. Л. Пацановского, редакция, вступительная статья и примечания профессора С. Я. Лурье, 352, стр., ОНТИ, М.— Л., 1936.

11. Leonhardi Euleri, Opera omnia, Series prima, Volumen nonum. Leonhardi Euleri Introductio in Analysin infinitorum, Tomus secundus, edidit Andreas Speiser, 402 стр. Genevae, 1945.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

ТОМ I

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,

Professore Regio BEROLINENSI, & *Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Нередко мне приходилось замечать, что бо́льшая часть трудностей, с которыми сталкиваются в анализе бесконечных изучающие математику, возникает оттого, что, едва усвоив элементарную алгебру, они направляют свои мысли к этому более высокому искусству, вследствие чего они не только как бы остаются стоять на пороге, но и составляют себе превратные представления о том бесконечном, идея которого здесь используется. Хотя анализ бесконечных не требует совершенного знания элементарной алгебры и всех сюда относящихся приемов, однако есть много вопросов, разрешение которых важно для подготовки изучающих к более высокой науке и которые, однако, в элементарной алгебре либо пропускаются, либо рассматриваются недостаточно обстоятельно. Поэтому я не сомневаюсь, что содержание этих книг сможет восполнить с избытком указанный пробел. Я старался не только пространнее и отчетливее, чем обычно, изложить все, что безусловно требует анализ бесконечных, но развил также довольно много вопросов, благодаря которым читатели незаметно и как бы сверх ожидания могут освоиться с идеей бесконечного. Много вопросов, разбираемых обычно в анализе бесконечных, я здесь разрешил при помощи правил элементарной алгебры, чтобы впоследствии тем лучше выявилась сущность того и другого метода.

Труд этот делится на две книги: в первой из них я охватил то, что относится к чистому анализу, во второй изложено все, что необходимо знать из геометрии, так как анализ бесконечных часто излагается так, что одновременно показывается и его приложение к геометрии. В обеих книгах опущены первоначальные элементы и излагается лишь то, что в других местах либо вовсе не рассматривается или рассматривается менее удобно, либо требуется по тем или иным соображениям.

Особенно обстоятельно изложено в первой книге учение о функциях, так как весь анализ бесконечных вращается вокруг переменных количеств и их функций. Там показано как преобразование функций, так и разложение их, а также развертывание в бесконечные ряды. Перечисляются многие виды функций, относительно которых речь должна идти преимущественно в высшем анализе. Прежде всего, я разделил их на алгебраические и трансцендентные: первые из них образуются из переменных количеств путем алгебраических действий; вторые же составляются иными способами или посредством тех же действий, повторяемых бесконечно много раз. Алгебраические функции разделяются прежде всего на рациональные и иррациональные. Я показываю разложение первых из них как на более простые слагаемые, так и на множители; эта операция оказывает весьма большую помощь в интегральном исчислении. Для вторых я указываю способ приведения их к рациональной форме путем удобных подстановок. Развертывание в бесконечные ряды касается в одинаковой степени обоих видов; к трансцендентным функциям оно применяется обычно с огромной пользой, а в какой степени учение о бесконечных рядах расширило высший анализ,— это всем известно.

Поэтому я прибавил несколько глав, где рассматриваются свойства, а также суммы многих бесконечных рядов. Некоторые из них таковы, что вряд ли могли бы быть найдены без помощи анализа бесконечных. К рядам этого рода относятся те, суммы которых выражаются или посредством логарифмов, или при помощи круговых дуг; количества эти, будучи трансцендентными, так как они выражаются путем квадратуры гиперболы и круга, по большей части рассматриваются лишь в анализе бесконечных. Затем я перехожу от степеней к показательным количествам, представляющим не что иное, как степени с переменными показателями. Их обращение приводит меня весьма естественно и плодотворно к представлению о логарифмах, и отсюда не только вытекают сами собой их весьма обширные применения, но также можно получить все те бесконечные ряды, посредством которых обычно представляются упомянутые количества. К тому же отсюда получается весьма простой способ составления логарифмических таблиц. Подобным образом я занимался рассмотрением дуг круга; этот род количеств хотя и очень отличается от логарифмов, однако связан с ними настолько тесно, что когда один из них получается в мнимом виде, то он переходит в другой. Повторив затем из геометрии относящееся к нахождению синусов и косинусов кратных и дробных дуг, я вывел из синуса или косинуса любой дуги синус и косинус весьма малой и как бы исчезающей дуги, и тем самым был приведен к бесконечным рядам. Отсюда, так как исчезающая дуга равна своему синусу, а косинус ее равен радиусу[1]), я мог сравнить любую дугу с ее синусом и косинусом посредством бесконечных рядов. Здесь я получил столь разнообразные как конечные, так и бесконечные выражения для количеств этого рода, что исчислению бесконечных затем не придется более широко заниматься исследованием их природы. Подобно тому как логарифмы требуют особого алгоритма, в котором ощущается крайне настоятельная потребность во всем анализе, так и количества круговые я привел к некоторому определенному алгоритму, так что они при вычислениях могут применяться так же удобно, как логарифмы и сами алгебраические количества. Как велика проистекающая отсюда польза для решения труднейших вопросов, ясно показывают и некоторые главы этой книги, и весьма многие примеры из анализа бесконечных, которые можно было бы привести, если бы они не были уже достаточно известны и не увеличивались в числе с каждым днем.

Это исследование принесло весьма большую помощь при разложении дробных функций на действительные множители; этот вопрос я рассмотрел подробнее, так как такое разложение совершенно необходимо в интегральном исчислении. Далее я подверг изучению бесконечные ряды, которые возникают из разложения функций этого рода и носят название рекуррентных; здесь я вывел как их суммы, так и общие члены, а также другие замечательные их свойства, и так как к этому привело разложение их на множители, то я разобрал и обратную задачу: каким образом произведения многих, даже бесконечного числа множителей путем перемножения развертываются в ряды. Это не только открывает путь к изучению бесчисленного количества рядов; так как этим способом можно разлагать в ряды

[1]) Здесь Эйлер остается при обычном для того времени представлении тригонометрических функций как линий в круге единичного радиуса. [*И. П.*]

произведения из бесконечного числа сомножителей, то я нашел довольно удобные числовые выражения для нахождения логарифмов синусов, косинусов и тангенсов. Кроме того, я вывел из того же источника решение многих вопросов, которые могут возникнуть при разбиении чисел [на слагаемые]; вопросы подобного рода без помощи этих приемов, по-видимому, превышают силы анализа.

Такое разнообразие материала легко могло разрастись на несколько томов; но я дал все, по мере возможности, настолько сжато, что всюду излагается — впрочем, весьма ясно,— лишь основное; более же подробная разработка предоставляется трудолюбию читателей, дабы они имели на чем упражнять свои силы, чтобы еще шире раздвинуть границы Анализа. Не боюсь открыто заявить, что в этой книге не только содержится много совершенно нового, но также указаны источники, откуда можно черпать многие замечательные открытия.

Точно так же я поступил и во второй книге, где исследовал вопросы, обычно относимые к высшей геометрии. Однако прежде чем приступить к коническим сечениям, к которым в других курсах обычно сводится вся эта часть, я изложил общую теорию кривых линий таким образом, чтобы она затем могла быть с пользой применена для изучения природы каких бы то ни было кривых линий. При этом я не пользуюсь никакими другими вспомогательными средствами, кроме уравнения, выражающего природу той или иной кривой линии, и показываю, как из этого уравнения можно вывести как фигуру кривой, так и ее основные свойства. Это особенно важно, как мне кажется, в применении к коническим сечениям, которые до сих пор изучались либо только при помощи геометрии, либо хотя и при помощи анализа, но весьма несовершенным и неестественным путем. Сначала я изложил общие свойства линий второго порядка, исходя из общего уравнения для этих линий; затем подразделил их на роды или виды, руководясь тем, имеют ли они ветви, уходящие в бесконечность, или же вся кривая заключена в конечном пространстве. В первом случае пришлось, сверх того, принять во внимание, сколько ветвей уходит в бесконечность и какова природа каждой из них, а также имеют ли они асимптотические прямые или нет. Так я получил три обычных вида конических сечений, из которых первый — эллипсис, целиком заключенный в конечном пространстве, второй — гипербола, имеющая четыре бесконечные ветви, стремящиеся к двум асимптотическим прямым; третьим же видом является парабола, имеющая две бесконечные ветви, лишенные асимптот.

Далее, я сходным образом подверг исследованию линии третьего порядка, которые я, изложив их общие свойства, разделил на 16 родов, отнеся к этим родам все 72 вида Ньютона. Самый же метод я настолько отчетливо описал, что деление по родам можно осуществить без труда для каждого из последующих порядков линий. Соответствующий опыт я проделал применительно к линиям четвертого порядка.

Покончив с этими исследованиями, относящимися к порядку линий, я вернулся к отысканию общих свойств всех линий. Я изложил метод определения касательных к кривым, их нормалей, а также и самой кривизны, выражаемой через радиус соприкасающегося круга. Все эти вопросы в настоящее время по большей части решаются с помощью дифференциального исчисления; однако я изложил их здесь только на основе обычной алгебры, дабы сделать затем более легким переход от анализа конечных к анализу бесконечных. Я исследовал также точки перегиба кривых, точки угловые, двойные и кратные и изложил способ, при помощи которого все эти точки могут быть найдены из уравнений без всякого труда. Впрочем, я не отрицаю, что эти вопросы значительно легче разрешаются с помощью дифференциального исчисления. Я коснулся также спорного вопроса об угловой точке второго порядка в случае, когда обе дуги, сходящиеся в угловой точке, имеют кривизну, обращенную в одну и ту же сторону, и изложил этот вопрос так, что впредь он уже не может вызывать каких-либо сомнений.

Затем я прибавил несколько глав, в которых показываю, как найти кривые линии, обладающие заданными свойствами, и, наконец, дал решения ряда задач, касающихся отдельных сечений круга.

Таковы те отделы геометрии, которые, по-видимому, наиболее полезны для изучения анализа бесконечных. В качестве приложения я изложил еще из области стереометрии вычислительную теорию тел и их поверхностей и показал, каким образом природа каждой поверхности может быть выражена уравнением с тремя переменными. Разделив затем, подобно линиям, и поверхности на порядки сообразно числу измерений, которые имеют переменные в уравнении, я показал, что в первом порядке содержится только плоская поверхность. Поверхности же второго порядка я, приняв во внимание части, простирающиеся в бесконечность, разделил на шесть родов, подобным же образом может быть произведено разделение и для остальных порядков. Я подверг рассмотрению также и пересечения двух поверхностей; так как по большей части это кривые, не лежащие в одной плоскости, я показал, как такие кривые могут быть выражены уравнениями. Наконец, я определил положение касательных плоскостей и прямых, являющихся нормалями к поверхностям.

Впрочем, так как многое здесь встречающееся рассматривалось уже другими, то мне надлежит просить снисхождения в том, что не везде я почтил упоминанием тех, кто до меня работал в этой области. Но моей задачей было изложить все как можно короче; история же каждой проблемы сильно увеличила бы объем труда. Однако многие вопросы, решение которых можно найти также в иных местах, здесь разрешены исходя из других принципов; таким образом, немалая часть приходится и на мою долю. Надеюсь, что как это, так, особенно, и то совершенно новое, что здесь сообщается, будет принято с благодарностью большинством тех, кто находит вкус в этих занятиях.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

КНИГА ПЕРВАЯ,

СОДЕРЖАЩАЯ

РАЗЪЯСНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПЕРЕМЕННЫХ КОЛИЧЕСТВ; ИХ РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ, РАВНО КАК В БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ,- ВМЕСТЕ С УЧЕНИЕМ О ЛОГАРИФМАХ, КРУГОВЫХ ДУГАХ И СИНУСАХ И ТАНГЕНСАХ ПОСЛЕДНИХ; И ВМЕСТЕ СО МНОГИМИ ДРУГИМИ ПРЕДМЕТАМИ, В НЕМАЛОЙ МЕРЕ ПОЛЕЗНЫХ ДЛЯ АНАЛИЗА БЕСКОНЕЧНЫХ.

ГЛАВА I
О ФУНКЦИЯХ ВООБЩЕ

1. *Постоянное количество есть количество определенное, сохраняющее всегда одно и то же значение.*

Такими количествами являются всякого рода числа, потому что они сохраняют постоянно одно и то же однажды полученное значение; если нужно постоянные количества этого рода обозначать знаками, то для этого употребляются начальные буквы алфавита a, b, c и т. д. В обыкновенном анализе, где рассматриваются только определенные количества, эти первые буквы алфавита означают обычно количества известные, а последние буквы — количества неизвестные; в высшем же анализе это различие не стараются так тщательно соблюдать, так как здесь по преимуществу заботятся о таком различении количеств, которым устанавливается постоянство одних и переменность других.

2. *Переменное количество есть количество неопределенное или всеобщее, которое содержит в себе решительно все определенные значения.*

Так как все определенные значения могут быть выражены числами, то переменное количество охватывает все числа некоторого рода. Как из понятий индивидов образуются понятия видов и родов, так переменное количество является родом, в котором содержатся все определенные количества. А такие переменные количества обозначаются обычно последними буквами алфавита z, y, x и т. д.

3. *Переменное количество становится определенным, когда ему придается какое-либо определенное значение.*

Переменное количество может быть определяемо бесчисленными способами, поскольку вместо него можно подставлять все решительно числа. Смысл переменного количества не будет исчерпан, если на его место не подставить все определенные значения. Таким образом, переменное количество охватывает собою решительно все числа, как положительные, так и отрицательные, как целые, так и дробные, как рациональные, так и иррациональные и трансцендентные. Даже нуль и мнимые числа не исключаются из значений переменного количества.

4. *Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств*[1]).

Всякое аналитическое выражение, в котором, за исключением переменного количества z, все количества, составляющие это выражение, постоянны, будет функцией z; так,

$$a+3z, \quad az-4z^2, \quad az+b\sqrt{a^2-z^2}, \quad c^z$$

и т. д. будут функциями z.

5. *Следовательно, функция переменного количества сама будет переменным количеством.*

Так как вместо переменного количества можно подставлять все определенные значения, то функция принимает бесчисленно много определенных значений; не будет исключено ни одно определенное значение, какое функция могла бы принять, поскольку переменное количество охватывает также и мнимые значения. Так, хотя функция $\sqrt{9-z^2}$ при подстановке вместо z действительных чисел никогда не может принять значение больше трех, однако, если давать z мнимые значения, как, например, $5\sqrt{-1}$, то нельзя указать никакого определенного значения, которое не могло бы быть получено из формулы $\sqrt{9-z^2}$. Иногда, однако, встречаются функции только кажущиеся, которые удерживают всегда одно и то же значение, как бы ни изменялось переменное количество, как, например,

$$z^0, \quad 1^z, \quad \frac{a^2-az}{a-z};$$

[1]) Следует иметь в виду, что в отличие от переменного количества постоянным Эйлер придает лишь действительные значения. См., например, далее § 11, 12. [*И. П.*]

они хотя ложным образом представляются на вид функциями, однако на самом деле являются количествами постоянными.

6. *Основное различие функций состоит в способе составления их из переменного количества и количеств постоянных.*

Оно, следовательно, зависит от действий, посредством которых количества могут друг с другом сочетаться и перемешиваться; действиями этими являются: сложение и вычитание, умножение и деление, возвышение в степень и извлечение корней; сюда надлежит отнести также решение уравнений. Кроме этих действий, называемых обычно алгебраическими, существует много других, трансцендентных, как-то: показательные, логарифмические и бесчисленные другие, доставляемые интегральным исчислением.

Между прочим, можно отметить некоторые виды функций, как, например, кратные z

$$2z, \quad 3z, \quad \frac{3}{5}z, \quad az \quad \text{и т. д.}$$

и степени z, как-то:

$$z^2, \quad z^3, \quad z^{\frac{1}{2}}, \quad z^{-1} \quad \text{и т. д.,}$$

они, правда, возникли от одного только действия, а название функции присваивается выражениям, возникающим от скольких угодно действий.

7. *Функции разделяются на алгебраические и трансцендентные; первые — это те, которые образуются только при помощи алгебраических действий; вторые — те, в которые входят и трансцендентные действия.*

Так, кратные и степени переменного z являются функциями алгебраическими, равно как и всевозможные выражения, образованные посредством упомянутых выше алгебраических действий, как, например,

$$\frac{a+bz^n-c\sqrt{2z-z^2}}{a^2z-3bz^3}.$$

Но часто алгебраические функции не могут даже быть представлены явно; такой, например, функцией переменного z является Z, если оно определено уравнением следующего рода:

$$Z^5=az^2Z^3-bz^4Z^2+cz^3Z-1.$$

Хотя решить это уравнение невозможно, однако ясно, что Z будет равно какому-то выражению, составленному из переменного z и постоянных количеств, вследствие чего Z будет какой-то функцией z [[1]][1]). Впрочем, относительно трансцендентных функций следует заметить, что функция будет трансцендентной лишь в том случае, если трансцендентное действие не только входит в нее, но, кроме того, затрагивает переменное количество. Если трансцендентные действия распространяются только на постоянные количества, то функцию все-таки надлежит считать алгебраической: так, если c означает длину окружности с радиусом, равным единице, то c во всяком случае будет количеством трансцендентным, однако выражения

$$c+z, \quad cz^3, \quad 4z^c$$

и т. д. будут алгебраическими функциями z. Не имеет большого значения высказанное некоторыми авторами сомнение, имеем ли мы право

[1]) Цифры в квадратных скобках относятся к примечаниям в конце книги.

причислять выражения вида z^c к алгебраическим или не имеем; некоторые предпочли даже степени z, показатели которых являются числами иррациональными, как, например, $z^{\sqrt{2}}$, именовать *интерсцендентными*, не желая называть их алгебраическими [2].

8. *Алгебраические функции подразделяются на рациональные и иррациональные; первые — это такие, в которых переменное количество не входит ни в какую иррациональность, последние же — это такие, в которых знаки радикалов затрагивают переменное количество.*

В функциях рациональных не участвуют, значит, иные действия, кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возвышения в степень с целыми показателями; так,

$$a+z,\quad a-z,\quad az,\quad \frac{a^2+z^2}{a+z},\quad az^3-bz^3 \text{ и т. д.}$$

будут рациональными функциями z. Выражения же

$$\sqrt{z},\quad a+\sqrt{a^2-z^2},\quad \sqrt{a-2z+z^2},\quad \frac{a^2-z\sqrt{a^2+z^2}}{a+z} \text{ и т. д.}$$

будут иррациональными функциями z.

Последние удобно разделять на явные и неявные. Явные — это те, которые выражены знаком радикалов, как указано только что на примерах. *Неявные* же иррациональные функции — это те, которые происходят от решения уравнений. Так, Z будет неявной иррациональной функцией z, если оно определяется уравнением

$$Z^7=azZ^2-bz^5,$$

так как даже при помощи знаков радикала нельзя получить явного значения Z, потому что обычная алгебра еще не достигла такой степени совершенства.

9. *Рациональные функции в свою очередь подразделяются на целые и дробные.*

В первых z нигде не имеет отрицательных показателей, и выражение не содержит дробей, в знаменатели которых входило бы переменное z; отсюда понятно, что дробными функциями будут те, в которых встречаются или знаменатели, содержащие z, или отрицательные показатели z. Общий вид целых функций будет

$$a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+ \text{ и т. д.};$$

в самом деле, нельзя придумать целой функции z, которая не заключалась бы в этом выражении. Все же дробные функции, ввиду того, что несколько дробей можно соединить в одну, будут заключаться в выражении

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+ \text{ и т. д.}}{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\zeta z^5+ \text{ и т. д.}},$$

причем следует заметить, что, будут ли постоянные количества a, b, c, d и т. д., α, β, γ, δ и т. д. положительными, отрицательными, целыми или дробными, рациональными, иррациональными или даже трансцендентными, — это не изменит природы функции.

10. *Затем, особенно надо учитывать подразделение функций на однозначные и многозначные*[1]).

Однозначная функция — это такая, которая сама получает единственное определенное значение, если переменному количеству z придается какое-либо определенное значение. *Многозначная* функция — та, которая при подстановке вместо переменного одного какого угодно определенного значения получает несколько определенных значений. Все рациональные функции, целые или дробные, будут функциями однозначными, так как выражения этого рода дают лишь одно-единственное значение, какое бы значение ни было придано переменному количеству. Иррациональные же функции все являются многозначными, потому что знаки радикалов обладают неопределенностью и дают два значения. И среди трансцендентных функций встречаются однозначные и многозначные; имеются даже функции с бесконечным числом значений; такова дуга круга, соответствующая синусу z, потому что существует бесчисленное множество дуг, имеющих один и тот же синус.

Буквами P, Q, R, S, T и т. д. будем обозначать отдельные однозначные функции z.

11. *Двузначная функция z есть такая, которая при любом значении z имеет два определенных значения.*

Такого рода функции представляют квадратные корни, как $\sqrt{2z+z^2}$; при подстановке любого количества вместо z выражение $\sqrt{2z+z^2}$ имеет двоякое значение — либо положительное, либо отрицательное. Вообще же Z будет двузначной функцией z, если оно определяется квадратным уравнением

$$Z^2-PZ+Q=0,$$

если, конечно, P и Q будут однозначными функциями z. Именно, будет

$$Z=\frac{1}{2}P\pm\sqrt{\frac{1}{4}P^2-Q},$$

откуда следует, что каждому определенному значению z соответствует двоякое определенное значение Z. Здесь нужно заметить, что или оба значения функции Z будут действительными, или оба мнимыми. При этом всегда, как известно из природы уравнений, сумма обоих значений Z будет $=P$, а произведение $=Q$.

12. *Трехзначная функция z есть такая, которая при любом значении z имеет три определенных значения.*

Функции этого рода ведут свое происхождение от решения кубических уравнений. Если P, Q и R будут функциями однозначными и

$$Z^3-PZ^2+QZ-R=0,$$

то Z будет трехзначной функцией z, потому что при любом определенном значении z оно принимает троякое значение. Эти три значения z, соответствующие одному какому-либо значению z, будут или все действительными, или одно будет действительным, а два остальных мнимыми. Кроме того, несомненно, сумма этих трех значений всегда будет $=P$,

[1]) У Эйлера применяются термины uniformis и multiformis, то есть, буквально, единообразные и многообразные. Дальше, соответственно, Эйлер пишет biformis, то есть двуобразная (функция), triformis—трехобразная и т. д. [*И. П.*]

сумма их произведений по два будет $=Q$ и произведение всех трех будет $=R$.

13. *Четырехзначная функция z есть такая, которая при любом значении z имеет четыре определенных значения.*

Функции этого рода возникают от решения уравнений четвертой степени. Если P, Q, R и S означают однозначные функции z и при этом

$$Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = 0,$$

то Z будет четырехзначной функцией z; это значит, что каждому значению z соответствуют четыре значения Z. Из этих четырех значений либо все будут действительными, либо два будут действительными и два мнимыми, либо все четыре будут мнимыми. Впрочем, сумма этих четырех значений Z будет всегда $=P$, сумма их произведений по два $=Q$, сумма их произведений по три $=R$, и произведение их всех $=S$. Подобным же образом строится определение функций пятизначных и следующих.

14. *Следовательно, Z будет многозначной функцией, которая при любом значении z имеет столько значений, сколько содержит единиц число n, если Z определяется уравнением*

$$Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \text{и т. д.} = 0.$$

Здесь, впрочем, следует заметить, что n должно быть числом целым и, значит, уравнение, определяющее Z, всегда должно быть приведено к рациональному виду, если мы хотим знать, сколь многозначной функцией от z является Z; после этого показатель наибольшей степени Z укажет искомое число значений, соответствующих каждому значению z. Затем также следует помнить, что буквы P, Q, R, S и т. д. должны означать однозначные функции; если же какая-либо из них была бы функцией многозначной, то функция Z дала бы гораздо больше значений, соответствующих каждому значению Z, чем указывает число измерений Z. Однако всегда, если какие-либо значения Z будут мнимыми, то число их будет четным [1]), откуда ясно, что если n будет числом нечетным, то по крайней мере одно значение Z будет действительным; напротив, может случиться, если число n будет четным, что ни одно из значений Z не будет действительным.

15. *Если Z будет многозначной функцией z такого рода, что всегда будет иметь только одно действительное значение, то Z будет как бы однозначной функцией z и в большинстве случаев сможет употребляться вместо функции однозначной.*

Функциями такого рода будут

$$\sqrt[3]{P},\ \sqrt[5]{P},\ \sqrt[7]{P} \text{ и т. д.},$$

так как они всегда дают одно только действительное значение при остальных мнимых, если только P будет однозначной функцией z. Поэтому выражение вида $P^{\frac{m}{n}}$ во всех тех случаях, когда n нечетно, может быть причислено к функциям однозначным, будет ли m числом чет-

[1]) См. § 30 и примечание [5].

ным или нечетным. Если же n будет числом четным, то $P^{\frac{m}{n}}$ или не будет иметь ни одного действительного значения, или будет иметь их два; отсюда выражения вида $P^{\frac{m}{n}}$ при n четном на этом же основании могут быть причислены к функциям двузначным, если, впрочем, дробь $\frac{m}{n}$ нельзя привести к меньшим членам [1]).

16. *Если y будет какой-либо функцией z, то и, обратно, z будет функцией y.*

Если y является функцией z, однозначной или многозначной, то дается уравнение, которое определяет y через z и постоянные количества. Из этого же уравнения z может быть определено через y и постоянные количества; следовательно, так как y есть количество переменное, z будет равно выражению, составленному из y и постоянных количеств, и будет, следовательно, функцией y. Отсюда также станет ясным, сколь многозначной функцией y будет z; может случиться, что хотя y будет однозначной функцией z, однако z будет многозначной функцией y.

Так, если y определяется через z из уравнения $y^3 = ayz - bz^2$, то y будет трехзначной функцией z, тогда как z будет только двузначной функцией y.

17. *Если y и x являются функциями z, то y также будет функцией x и, обратно, x будет функцией y.*

Если y является функцией z, то z будет также функцией y; подобным образом z будет функцией x. Следовательно, функция y равна функции x; из этого уравнения можно определить y через x и, обратно, x через y.

Отсюда ясно, что y — функция x, а x — функция y.

Весьма часто из-за несовершенства алгебры эти функции нельзя выразить явно; тем не менее эта взаимность функций имеет такой характер, как если бы все уравнения могли быть решены. Впрочем, посредством способа, излагаемого в алгебре, из данных двух уравнений, из которых одно содержит y и z, а другое x и z, путем исключения количества z образуется одно уравнение, выражающее соотношение между x и y [[3]].

18. *Наконец следует отметить некоторые особые виды функций; так, четная функция z есть такая, которая дает одно и то же значение, будет ли вместо z подставлено любое определенное значение $+k$ или $-k$.*

Такого рода четной функцией z будет z^2; если положить либо $z = +k$, либо $z = -k$, то выражение z^2 даст одно и то же значение, именно $z^2 = +k^2$. Подобным образом четными функциями z будут степени z: z^4, z^6, z^8 и вообще всякая степень z^m, если m будет четным числом, положительным или отрицательным. Так как $z^{\frac{m}{n}}$ считается как бы однозначной функцией z, когда n — число нечетное, то ясно, что $z^{\frac{m}{n}}$ будет четной функцией z, если m — число

---

[1]) То есть сократить. Это замечание относится по существу ко всему абзацу. [*С. Л.*]

четное, а n — нечетное. Поэтому выражения, составленные каким-либо образом из степеней этого рода, дадут четные функции z; так, Z будет четной функцией z, если будет

$$Z = a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{и т. д.},$$

а также если

$$Z = \frac{a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{и т. д.}}{\alpha + \beta z^2 + \gamma z^4 + \delta z^6 + \text{и т. д.}};$$

подобным образом, если вводить дробные показатели z, то Z будет четной функцией z, когда

$$Z = a + bz^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{2}{5}} + dz^{\frac{4}{7}} + \text{и т. д.},$$

или

$$Z = a + bz^{-\frac{2}{3}} + cz^{-\frac{4}{3}} + dz^{-\frac{2}{5}} + \text{и т. д.},$$

или

$$Z = \frac{a + bz^{\frac{2}{7}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha + \beta z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{-\frac{2}{5}} + \delta z^{\frac{4}{7}}}.$$

Выражения этого рода, будучи все однозначными функциями z, могут быть названы четными однозначными функциями z.

19. *Многозначная четная функция z есть такая, которая при любом значении z хотя и имеет несколько определенных значений, однако дает одни и те же значения, положить ли $z = +k$ или $-k$.*

Пусть Z будет такого рода многозначной четной функцией z; так как природа многозначной функции выражается уравнением между Z и z, в котором Z имеет столько измерений, сколько содержит различных значений, то ясно, что Z будет многозначной четной функцией, если в уравнении, выражающем природу Z, переменное количество z всюду имеет четное число измерений. Так, если

$$Z^2 = az^4Z + bz^2,$$

то Z будет двузначной четной функцией z; если же

$$Z^3 - az^2Z^2 + bz^4Z - cz^8 = 0,$$

то Z будет трехзначной четной функцией z; и вообще, если P, Q, R, S и т. д. означают однозначные четные функции z, то Z будет двузначной четной функцией z, когда

$$Z^2 - PZ + Q = 0.$$

Затем Z будет трехзначной четной функцией z, если

$$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0,$$

и так далее.

20. *Итак, однозначной или многозначной четной функцией будет такого рода выражение, составленное из переменного количества z и постоянных, в котором число измерений z везде четное.*

Функциями этого рода, кроме однозначных, примеры которых приведены раньше, будут, например, такие выражения:

$$a+\sqrt{b^2-z^2},\quad az^2+\sqrt[3]{a^6z^4-bz^2},$$

а также

$$az^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{z^2+\sqrt{a^4-z^4}}\quad \text{и т. д.}$$

Отсюда ясно, что четные функции можно определить как функции z^2.

Если положить $y=z^2$ и Z будет какой-либо функцией y, то, после подстановки всюду z^2 вместо y, Z будет такого рода функцией z, в которой z везде имеет четное число измерений. Следует, однако, исключить те случаи, когда в выражении для Z встречаются $\sqrt{y}$, а также другие формы этого рода, которые при замене $y=z^2$ допускают знаки радикалов. Хотя $y+\sqrt{ay}$ будет функцией y, однако после подстановки $y=z^2$ это выражение не будет четной функцией z, так как будет

$$y+\sqrt{ay}=z^2+z\sqrt{a}.$$

За исключением этих случаев последнее определение четных функций будет хорошим и удобным для образования функций этого рода.

21. *Нечетная функция z есть такая функция, значение которой при подстановке $-z$ вместо z также становится отрицательным.*

Нечетными функциями этого рода будут все степени z, показатели которых суть числа нечетные, как z^1, z^3, z^5, z^7 и т. д.; также z^{-1}, z^{-3}, z^{-5} и т. д.; но тогда и $z^{\frac{m}{n}}$ будет функцией нечетной, если оба числа m и n будут числами нечетными. Вообще же всякое выражение, составленное из степеней этого рода, будет нечетной функцией z; такого рода будут

$$az+bz^3,\quad az+az^{-1},$$

также

$$z^{\frac{1}{3}}+az^{\frac{3}{5}}+bz^{-\frac{5}{3}}\quad \text{и т. д.}$$

Природу и происхождение этих функций легче будет понять из функций четных.

22. *Если четную функцию z помножить на z или на какую-либо его нечетную функцию, то произведение будет нечетной функцией z.*

Пусть P будет четной функцией z и, следовательно, остается без изменения, если вместо z подставить $-z$; если в произведении Pz подставить $-z$ вместо z, то получится $-Pz$; отсюда Pz будет нечетной функцией z. Пусть теперь P будет четной функцией z и Q — нечетной функцией z; из определения ясно, что если вместо z подставить $-z$, то значение P останется тем же, а значение Q перейдет в $-Q$, т. е. в отрицательное; поэтому произведение PQ, если подставить $-z$ вместо z, перейдет в $-PQ$, т. е. в отрицательное; вследствие этого PQ будет нечетной функцией z. Так, поскольку $a+\sqrt{a^2+z^2}$ есть четная функция и z^3 нечетная функция z, то произведение

$$az^3+z^3\sqrt{a^2+z^2}$$

будет нечетной функцией z; подобным же образом

$$z\frac{a+bz^2}{\alpha+\beta z^2}=\frac{az+bz^3}{\alpha+\beta z^2}$$

будет нечетной функцией z. Из сказанного также следует, что если из двух функций P и Q одна будет четной, а другая нечетной, и одну разделить на другую, то частное будет функцией нечетной, т. е. $\frac{P}{Q}$, а также $\frac{Q}{P}$ будет нечетной функцией z.

23. *Если нечетную функцию помножить или разделить на нечетную, то результат будет функцией четной.*

Пусть Q и S будут нечетными функциями z, так что при подстановке $-z$ вместо z Q перейдет в $-Q$ и S перейдет в $-S$; отсюда видно, что как произведение QS, так и частное $\frac{Q}{S}$ сохранят прежнее значение, если вместо z подставить $-z$; поэтому и то и другое будут четными функциями z. Также очевидно, что квадрат всякой нечетной функции будет функцией четной, куб же — функцией нечетной; биквадрат — снова функцией четной и т. д.

24. *Если y будет нечетной функцией z, то, обратно, z будет нечетной функцией y.*

Пусть y будет нечетной функцией z, тогда, если подставить $-z$ вместо z, y перейдет в $-y$. Если же z определить через y, то неизбежно при подстановке $-y$ вместо y также z перейдет в $-z$ и, таким образом, будет нечетной функцией y. Так, при

$$y=z^3$$

y будет нечетной функцией z; также из уравнения

$$z^3=y$$

или

$$z=y^{\frac{1}{3}}$$

z будет нечетной функцией y. И если

$$y=az+bz^3,$$

то y будет нечетной функцией z, и, обратно, из уравнения

$$bz^3+az=y$$

значение z, выраженное через y, будет нечетной функцией y.

25. *Если природа функции y определяется такого рода уравнением, в отдельных членах которого число измерений y и z вместе будет везде четным, либо нечетным, то y будет нечетной функцией z.*

Действительно, если в такого рода уравнении написать везде $-z$ вместо z и $-y$ вместо y, то либо все члены уравнения останутся прежними, либо все станут отрицательными; в обоих случаях уравнение останется без перемены. Отсюда ясно, что $-y$ определится через $-z$ таким же образом, как $+y$ определяется через $+z$; и, поэтому, если вместо z подставить $-z$, то значение y перейдет в $-y$, т. е. y будет нечетной функцией z. Так, если будет

$$y^2 = ayz + bz^2 + c$$

или

$$y^3 + ay^2z = byz^2 + cy + dz,$$

то y из обоих уравнений будет нечетной функцией z.

26. *Если Z будет функцией z и Y — функцией y, причем Y будет определено через переменное y и постоянные таким же образом, как Z определяется через переменное z и постоянные, то эти функции Y и Z называются подобными функциями y и z.*

Если, например, будет

$$Z = a + bz + cz^2 \quad \text{и} \quad Y = a + by + cy^2,$$

то Z и Y будут подобными функциями z и y; аналогичным образом в случае многозначных функций, если

$$Z^3 = az^2Z + b \quad \text{и} \quad Y^3 = ay^2Y + b,$$

то Z и Y будут подобными функциями z и y. Отсюда следует, что, когда Y и Z будут такого рода функциями y и z, тогда, если вместо z написать y, функция Z перейдет в функцию Y. Это подобие выражают обычно, говоря, что Y является такой же функцией y, какой функцией z является Z. Эти выражения будут применимы независимо от того, будут ли переменные количества z и y связаны друг с другом или нет; так, какой функцией y будет

$$ay + by^3,$$

такой же функцией $y + n$ будет

$$a(y + n) + b(y + n)^3,$$

причем, разумеется, $z = y + n$; далее, какой функцией z будет

$$\frac{a + bz + cz^2}{\alpha + \beta z + \gamma z^2},$$

такой же функцией $\frac{1}{z}$ будет

$$\frac{az^2 + bz + c}{\alpha z^2 + \beta z + \gamma},$$

если положить $y = \frac{1}{z}$. Отсюда ясно виден смысл выражения «подобие функций», весьма широко применяемого во всем высшем анализе.

Вот вообще все, что достаточно знать о природе функций одного переменного, поскольку более полное изложение будет дано в дальнейшем применении.

ГЛАВА II
О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУНКЦИЙ

27. *Функции преобразуются в другие формы либо путем введения вместо переменного количества другого, либо с сохранением того же переменного количества.*

Если сохраняется то же переменное количество, то функция, собственно говоря, изменяться не может, а все преобразование состоит в выражении той же функции другим образом, ибо, как известно из алгебры, одно и то же количество может быть выражено во многих различных формах. Такого рода будут преобразования в том случае, когда вместо функции

$$2-3z+z^2 \quad \text{подставляют} \quad (1-z)(2-z),$$

или

$$(a+z)^3 \quad \text{вместо} \quad a^3+3a^2z+3az^2+z^3,$$

или

$$\frac{a}{a-z}+\frac{a}{a+z} \quad \text{вместо} \quad \frac{2a^2}{a^2-z^2},$$

или

$$\sqrt{1+z^2}+z \quad \text{вместо} \quad \frac{1}{\sqrt{1+z^2}-z};$$

эти выражения, хотя и отличаются по форме, по существу совпадают. Часто из этих многих равнозначащих форм одна бывает более удобной для достижения поставленной цели, чем остальные, поэтому следует выбирать всегда форму, наиболее удобную.

Другой способ преобразования, когда вместо переменного количества z вводится другое переменное количество y, находящееся с z в данном соотношении, называется подстановкой; этот способ надлежит применять для того, чтобы предложенная функция выразилась короче и удобнее; так, если была задана функция z

$$a^4-4a^3z+6a^2z^2-4az^3+z^4$$

и если вместо $a-z$ положить y, то получится гораздо более простая функция y^4; также, если дана иррациональная функция z

$$\sqrt{a^2+z^2}$$

и если положить

$$z=\frac{a^2-y^2}{2y},$$

то эта функция, выраженная через y, станет рациональной, именно,

$$\frac{a^2+y^2}{2y}.$$

Этот способ преобразования я отнесу в следующую главу; в этой же главе изложу тот способ, который проводится без подстановки.

28. *Целая функция переменного z часто удобно разлагается на свои множители и, таким образом, преобразуется в произведение.*

Если целая функция разлагается этим способом на множители, то ее природа познается гораздо легче; тотчас же выясняются случаи, когда значение функции равно нулю. Так, функция

$$6-7z+z^3$$

преобразуется в произведение

$$(1-z)(2-z)(3+z),$$

откуда сразу ясно, что данная функция в трех случаях равна нулю, именно: если $z=1$, $z=2$ и $z=-3$, а эти свойства из формы $6-7z+z^3$ не так легко усмотреть. Множители такого рода, в которых не встречается никакая [более высокая][1]) степень z, называют *простыми* множителями, в отличие от множителей составных, в которые входит квадрат, куб или другая более высокая степень z. Общая форма простых множителей будет

$$f+gz,$$

форма множителей двойных

$$f+gz+hz^2,$$

форма множителей тройных

$$f+gz+hz^2+iz^3$$

и т. д. При этом видно, что двойной множитель заключает два простых множителя, тройной множитель — три простых и т. д. Поэтому целая функция z, в которой показатель высшей степени z равен n, будет содержать n простых множителей; отсюда вместе с тем узнается число множителей, если бы даже какие-либо множители были двойными, тройными и т. д. [4].

29. *Простые множители любой целой функции Z переменного z находятся, если положить функцию Z равной нулю и разыскать из этого уравнения все корни z; отдельные корни переменного z дадут столько же простых множителей функции Z.*

Так, если в уравнении $Z=0$ какой-либо корень будет $z=f$, то $z-f$ будет делителем, а следовательно, и множителем функции Z; надо исследовать, таким образом, все корни уравнения $Z=0$; пусть они будут

$$z=f,\quad z=g,\quad z=h \text{ и т. д.};$$

[1]) Вставка в квадратных скобках, необходимая по смыслу текста, сделана по изданию в Opera omnia. [*И. П.*]

тогда функция Z разложится на свои простые множители и преобразуется в произведение

$$Z=(z-f)(z-g)(z-h) \text{ и т. д.}$$

Здесь, впрочем, надо заметить, что если коэффициент наивысшей степени z в Z не будет равен $+1$, то произведение $(z-f)(z-g)$ и т. д., сверх того, следует помножить на этот коэффициент. Так, если

$$Z=Az^n+Bz^{n-1}+Cz^{n-2}+ \quad \text{и т. д.},$$

то будет

$$Z=A(z-f)(z-g)(z-h) \quad \text{и т. д.}$$

Если же

$$Z=A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+ \quad \text{и т. д.}$$

и найденные корни уравнения $Z=0$ будут f, g, h и т. д., то

$$Z=A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right) \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда понятно, что если, обратно, множителем функции Z будет $z-f$ или $1-\frac{z}{f}$, то при подстановке f на место z значение функции обратится в нуль, ибо если положить $z=f$, то должен исчезнуть множитель $z-f$ или $1-\frac{z}{f}$ функции Z, а вследствие этого и сама функция Z.

30. *Простые множители будут либо действительными, либо мнимыми; если функция Z имеет мнимые множители, то число их всегда будет четным.*

Действительно, так как простые множители возникают из корней уравнения $Z=0$, то действительные корни дадут действительные множители, а мнимые — мнимые; но во всяком уравнении число мнимых корней всегда четное; поэтому функция Z либо не будет иметь мнимых множителей, либо будет иметь их два, или четыре, или шесть и т. д. [5]. Если функция Z имеет только два мнимых множителя, то их произведение будет действительным, и поэтому даст двойной действительный множитель. Пусть P равно произведению всех действительных множителей; тогда произведение двух мнимых множителей равно $\frac{Z}{P}$ и, значит, будет действительным. Подобным образом, если функция Z имеет четыре, или шесть, или восемь и т. д. мнимых множителей, то их произведение всегда будет действительным, именно будет равным частному от деления функции Z на произведение всех действительных множителей.

31. *Если Q будет действительное произведение четырех простых мнимых множителей, то это произведение Q может быть также разложено на два действительных двойных множителя* [6].

В самом деле, Q будет иметь вид

$$z^4+Az^3+Bz^2+Cz+D;$$

если отрицается возможность разложения этой функции на два действительных двойных множителя, то должна быть принята разложимость на два двойных мнимых множителя, которые будут иметь вид

$$z^2-2(p+q\sqrt{-1})z+r+s\sqrt{-1}$$

и

$$z^2-2(p-q\sqrt{-1})z+r-s\sqrt{-1},$$

ибо нельзя себе представить другие мнимые формы, произведение которых было бы действительным, именно равным $z^4+Az^3+Bz^2+Cz+D$. Из этих двойных мнимых множителей вытекают следующие четыре простых мнимых множителя для Q:

$$\text{I.}\qquad z-(p+q\sqrt{-1})+\sqrt{p^2+2pq\sqrt{-1}-q^2-r-s\sqrt{-1}},$$

$$\text{II.}\qquad z-(p+q\sqrt{-1})-\sqrt{p^2+2pq\sqrt{-1}-q^2-r-s\sqrt{-1}},$$

$$\text{III.}\qquad z-(p-q\sqrt{-1})+\sqrt{p^2-2pq\sqrt{-1}-q^2-r+s\sqrt{-1}},$$

$$\text{IV.}\qquad z-(p-q\sqrt{-1})-\sqrt{p^2-2pq\sqrt{-1}-q^2-r+s\sqrt{-1}}.$$

Если перемножить между собою первый и третий множители и положить для краткости

$$t=p^2-q^2-r \quad \text{и} \quad u=2pq-s,$$

то произведение этих множителей будет равно

$$z^2-\left(2p-\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}}\right)z+p^2+q^2-p\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}}-$$
$$-q\sqrt{-2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+\sqrt{t^2+u^2},$$

и во всяком случае, будет действительно. Подобным же образом будет действительным произведение второго и четвертого множителей, а именно, оно равно

$$z^2-\left(2p+\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}}\right)z+p^2+q^2+p\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+$$
$$+q\sqrt{-2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+\sqrt{t^2+u^2}.$$

Итак, данное произведение Q, возможность разложения которого на два действительных двойных множителя отрицалась, тем не менее в действительности разложено таким путем на два действительных двойных множителя.

32. *Если целая функция Z переменного z имеет простые мнимые множители, то сколько бы их ни было, их всегда можно соединить по два так, чтобы эти произведения были действительными.*

Так как число мнимых корней всегда четное, то пусть оно равно $2n$; прежде всего ясно, что произведение всех этих мнимых корней будет действительным. Поэтому, если будет только два мнимых корня, то их произведение во всяком случае будет действительным; если будет четыре мнимых множителя, то, как мы видели, произведение их может быть разложено на два двойных действительных множителя вида fz^2+gz+h. Но, хотя этот способ доказательства нельзя распространить на высшие степени, однако представляется несомненным, что это свойство справедливо для любого числа мнимых множителей, так что вместо

$2n$ простых мнимых множителей могут быть введены n действительных двойных. Отсюда всякая целая функция переменного z может быть разложена на действительные множители — простые или двойные. Хотя это и не доказано со всею строгостью, однако справедливость этого будет в большой мере подкреплена в дальнейшем[1]), где функции вида

$$a+bz^n, \quad a+bz^n+cz^{2n}, \quad a+bz^n+cz^{2n}+dz^{3n}$$

и т. д. на самом деле будут разложены на такие двойные действительные множители.

33. *Если целая функция Z при подстановке $z=a$ принимает значение A, а при подстановке $z=b$ принимает значение B, то при подстановке вместо z значений, промежуточных между a и b, функция Z может принимать любые промежуточные значения между A и B.*

Так как Z есть однозначная функция z, то, какое бы действительное значение ни было придано z, функция Z получит при этом также действительное значение. Так как Z в первом случае, при $z=a$, принимает значение A, в последнем же, при $z=b$, — значение B, то она не может перейти от A к B, не пройдя через все промежуточные значения. Если уравнение $Z-A=0$ имеет действительный корень и одновременно $Z-B=0$ дает действительный корень, тогда и уравнение $Z-C=0$ будет также иметь действительный корень, если только C заключается между значениями A и B.

Поэтому, если выражения $Z-A$ и $Z-B$ имеют простые действительные множители, то всякое выражение $Z-C$ будет иметь простые действительные множители, коль скоро C заключается между значениями A и B.

34. *Если у целой функции Z показатель наибольшей степени z будет числом нечетным $2n+1$, то эта функция Z будет иметь по меньшей мере один простой действительный множитель. Функция Z будет, очевидно, иметь такой вид*:

$$z^{2n+1}+\alpha z^{2n}+\beta z^{2n-1}+\gamma z^{2n-2}+ \text{ и т. д.}$$

Если в ней положить $z=\infty$, то значения отдельных членов по сравнению с первым исчезнут, и будет

$$Z=(\infty)^{2n+1}=\infty;$$

поэтому $Z-\infty$ будет иметь простой действительный множитель, именно $z-\infty$. Если же положить $z=-\infty$, то

$$Z=(-\infty)^{2n+1}=-\infty,$$

стало быть, $Z+\infty$ будет иметь простой действительный множитель $z+\infty$. Но так как и $Z-\infty$ и $Z+\infty$ имеют простые действительные множители, то отсюда следует, что $Z-C$ также будет иметь простой действительный множитель, если только C заключается между пределами $+\infty$ и $-\infty$, т. е. если C будет каким угодно действительным числом — положительным или отрицательным. Таким образом, если положить $C=0$, то функция Z будет иметь простой действительный множитель $z-c$; при этом количество c будет заключаться между пре-

[1]) См. § 150—154. [*А. К.*]

делами $+\infty$ и $-\infty$, т. е. будет количеством либо положительным, либо отрицательным, либо нулем.

35. *Целая функция Z, в которой показатель наибольшей степени переменного z есть число нечетное, будет иметь или один простой действительный множитель, или три, или пять, или семь и т. д.*

Действительно, так как было показано, что функция Z безусловно будет иметь один простой действительный множитель, $z-c$, то положим, что она, кроме того, имеет еще один множитель $z-d$, и разделим функцию Z, в которой наибольшая степень z есть z^{2n+1}, на $(z-c)(z-d)$; наивысшая степень в частном будет z^{2n-1}; ее показатель, будучи числом нечетным, опять указывает на то, что Z будет обладать еще одним простым действительным множителем. Итак, если Z будет иметь более одного простого действительного множителя, то она будет иметь три или (так как таким же образом можно поступать сколько угодно раз) пять, или семь и т. д. Следовательно, число простых действительных множителей будет нечетным, а так как число всех простых множителей равно $2n+1$, то число мнимых множителей будет четным.

36. *Целая функция Z, в которой показатель наибольшей степени z есть четное число $2n$, будет иметь или два простых действительных множителя, или четыре, или шесть, и т. д.*

Положим, что у функции Z число простых действительных множителей нечетное, $2m+1$; если, следовательно, функцию Z разделить на произведение всех их, то наибольшая степень частного будет равна $z^{2n-2m-1}$ и показатель ее есть число нечетное; поэтому функция Z будет иметь, кроме этих, еще один простой действительный множитель, откуда число всех простых действительных множителей будет, по меньшей мере, $2m+2$, следовательно, четное; число мнимых множителей также будет четным. Таким образом, у всякой целой функции простые мнимые множители будут парными, как это, впрочем, мы уже установили раньше.

37. *Если в целой функции Z показатель наибольшей степени z будет числом четным, а свободный, или постоянный член будет со знаком минус, функция Z будет иметь по меньшей мере два простых действительных множителя.*

Функция Z, о которой идет речь, будет иметь вид

$$z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \pm \ldots \pm \nu z - A.$$

Если подставить $z=\infty$, то, как мы видели выше, будет $Z=\infty$; если же подставить $z=0$, то будет $Z=-A$. Следовательно, $Z-\infty$ будет иметь действительный множитель $z-\infty$, а $Z+A$ множитель $z-0$; отсюда, так как нуль заключается между пределами $-\infty$ и $+A$, $Z+0$ будет иметь простой действительный множитель $z-c$, причем c будет заключаться между пределами 0 и ∞.

Далее, так как при подстановке $z=-\infty$ будет $Z=\infty$, а значит, $Z-\infty$ будет иметь множитель $z+\infty$, и вместе с тем $Z+A$ имеет множитель $z+0$, то выходит, что $Z+0$ будет иметь также простой действительный множитель $z+d$, причем d будет заключаться между пределами 0 и ∞; отсюда и вытекает предложение. Из сказанного видно, что если Z будет такой функцией, как здесь указано, то уравнение

$Z=0$ должно иметь по крайней мере два действительных корня: один положительный, другой отрицательный. Так, уравнение

$$z^4+\alpha z^3+\beta z^2+\gamma z-a^2=0$$

имеет два действительных корня, положительный и отрицательный [7].

38. *Если в дробной функции переменное количество z в числителе имеет такое же или большее число измерений, чем в знаменателе, то эта функция может быть разложена на две части, одна из которых будет целой функцией, а другая дробной, в числителе которой переменное количество z будет иметь меньшее число измерений, чем в знаменателе.*

В самом деле, если показатель наибольшей степени z в знаменателе будет меньше, чем в числителе, то в таком случае можно числитель делить на знаменатель обычным путем до тех пор, пока не дойдем в частном до отрицательных показателей; прервав на этом месте процесс деления, мы получим частное, состоящее из целой части и дроби, в числителе которой число измерений z будет меньше, чем в знаменателе; и это частное будет равно заданной функции. Так, если будет дана дробная функция $\frac{1+z^4}{1+z^2}$, то она путем деления разложится так:

$$
\begin{array}{rl}
z^2+1)\ & z^4+1\ \left(z^2-1+\dfrac{2}{1+z^2}\right. \\
& \underline{z^4+z^2\quad} \\
& \quad -z^2+1 \\
& \quad \underline{-z^2-1} \\
& \qquad\quad +2
\end{array}
$$

и получится

$$\frac{1+z^4}{1+z^2}=z^2-1+\frac{2}{1+z^2}.$$

Подобного рода дробные функции, у которых переменное количество z имеет столько же или больше измерений в числителе, чем в знаменателе, по аналогии с арифметикой могут быть названы *неправильными* дробями или неправильными дробными функциями, — в отличие от *правильных* дробных функций, в числителе которых переменное количество z имеет меньше измерений, чем в знаменателе. Итак, неправильная дробная функция может быть разложена на целую и правильную дробную функции и это разложение достигается путем обычного процесса деления.

39. *Если знаменатель дробной функции имеет два взаимно простых множителя, то такая дробная функция разложится на две дроби, знаменатели которых будут соответственно равны этим двум множителям.*

Хотя разложение это распространяется в равной мере и на неправильные дробные функции и на правильные, однако мы будем его применять главным образом к правильным. По разложении знаменателя такой дробной функции на два взаимно простых множителя сама функция разложится на две другие правильные дробные функции, знаменатели которых будут равны, соответственно, этим двум множителям; разложение это, если дроби будут правильными, может быть выполнено только одним способом, справедливость чего будет яснее видна из примера, чем из рассуждения. Действительно, пусть дана дробная функция

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4},$$

знаменатель которой $1+4z^4$ равен произведению

$$(1+2z+2z^2)(1-2z+2z^2);$$

заданная дробь разложится на две дроби, знаменатель одной из которых будет $1+2z+2z^2$, а другой $1-2z+2z^2$; для нахождения их, так как обе правильны, положим числитель одной из них равным $\alpha+\beta z$, а другой — равным $\gamma+\delta z$; при этом по допущению

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4}=\frac{\alpha+\beta z}{1+2z+2z^2}+\frac{\gamma+\delta z}{1-2z+2z^2};$$

сложим, на самом деле, эти две дроби; тогда у суммы будет

числитель	знаменатель
$+\alpha-2\alpha z+2\alpha z^2$ $+\beta z-2\beta z^2+2\beta z^3$ $+\gamma+2\gamma z+2\gamma z^2$ $+\delta z+2\delta z^2+2\delta z^3,$	$1+4z^4.$

Так как знаменатель равен знаменателю данной дроби, то числители также должны быть сделаны равными; так как неизвестных букв α, β, γ, δ столько, сколько надо получить равных членов, то это всегда возможно и притом только одним образом — именно, получаем четыре таких уравнения:

$$\text{I.}\quad \alpha+\gamma=1,\qquad \text{III.}\quad 2\alpha-2\beta+2\gamma+2\delta=3,$$

$$\text{II.}\quad -2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=-2,\qquad \text{IV.}\quad 2\beta+2\delta=-4.$$

Отсюда, так как

$$\alpha+\gamma=1 \quad \text{и} \quad \beta+\delta=-2,$$

уравнения II и III дадут

$$\alpha-\gamma=0 \quad \text{и} \quad \delta-\beta=\frac{1}{2},$$

откуда

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \gamma=\frac{1}{2},\quad \beta=-\frac{5}{4},\quad \delta=-\frac{3}{4},$$

и, таким образом, заданная дробь

$$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{1+4z^4}$$

преобразуется в такие две.

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z}{1+2z+2z^2}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z}{1-2z+2z^2}.$$

Легко видеть, что разложение всегда должно идти подобным образом, так как вводится всегда столько неизвестных букв, сколько нужно для получения данного числителя. Из общего учения о дробях понятно, что это разложение может иметь место только в том случае, когда множители знаменателя будут взаимно простыми.

40. *Итак, дробная функция* $\frac{M}{N}$ *может быть разложена на столько простых дробей вида* $\frac{A}{p-qz}$, *сколько простых не равных между собою множителей имеет знаменатель* N.

Пусть дробь $\frac{M}{N}$ представляет некоторую правильную дробную функцию, так что M и N являются целыми функциями z, и при этом наивысшая степень z в M меньше, чем в N. Итак, если знаменатель N будет разложен на свои простые множители и последние окажутся не равными, то выражение $\frac{M}{N}$ разложится на столько дробей, сколько простых множителей содержится в знаменателе N, так как каждый множитель уйдет в знаменатель частной дроби. Поэтому, если $p-qz$ будет множителем функции N, то он будет знаменателем какой-то частной дроби; так как в числителе этой дроби число измерений z должно быть меньше, чем в знаменателе $p-qz$, то числитель непременно будет количеством постоянным. Поэтому из каждого простого множителя $p-qz$ знаменателя N получится простая дробь $\frac{A}{p-qz}$; при этом сумма всех таких дробей будет равна данной дроби $\frac{M}{N}$.

ПРИМЕР

Пусть, например, дана дробная функция

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}.$$

Так как простыми множителями знаменателя являются z, $1-z$ и $1+z$, то наша функция разложится на такие три простые дроби:

$$\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{1+z}=\frac{1+z^2}{z-z^3};$$

здесь нужно определить постоянные числители A, B и C. Приведем эти дроби к общему знаменателю, который будет $z-z^3$; сумма же числителей должна будет равняться $1+z^2$, откуда получается уравнение

$$\begin{aligned} A+Bz-Az^2 &= 1+z^2=1+0z+z^2,\\ +Cz+Bz^2 &\\ -Cz^2 & \end{aligned}$$

которое дает столько приравниваний, сколько имеется неизвестных букв A, B, C; именно, будет

$$\text{I. } A=1,$$
$$\text{II. } B+C=0,$$
$$\text{III. } -A+B-C=1;$$

отсюда

$$B-C=2,$$

и затем

$$A=1,\quad B=1 \quad \text{и} \quad C=-1.$$

Таким образом, разложение данной функции

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}$$

представится в таком виде:

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}.$$

Подобно этому убеждаемся, что сколько бы знаменатель N ни имел простых, не равных между собою множителей, всегда дробь $\frac{M}{N}$ будет разлагаться на столько же простых дробей. Если несколько множителей будут между собою равны, тогда разложение следует производить другим способом, который будет изложен дальше.

41. *Итак, всякий простой множитель знаменателя N дает простую дробь в разложении данной функции $\frac{M}{N}$; требуется показать, каким образом, зная простой множитель знаменателя N, найти соответственную простую дробь* [8].

Пусть $p-qz$ есть простой множитель N, так что

$$N=(p-qz)S;$$

при этом S есть целая функция z. Пусть возникшая из множителя $p-qz$ дробь равна

$$\frac{A}{p-qz},$$

и пусть дробь, которая должна возникнуть из другого множителя S знаменателя, равна

$$\frac{P}{S},$$

тогда согласно § 39 должно быть

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{p-qz}+\frac{P}{S}=\frac{M}{(p-qz)S},$$

откуда

$$\frac{P}{S}=\frac{M-AS}{(p-qz)S}.$$

Так как эти дроби должны совпасть, то $M-AS$ непременно должно делиться на $p-qz$, так как целая функция P равна этому частному. Но $p-qz$, будучи делителем $M-AS$, исчезает, если подставить $z=\frac{p}{q}$. Поэтому, если подставить везде в M и S вместо z постоянное значение $\frac{p}{q}$, то будет $M-AS=0$, откуда

$$A=\frac{M}{S}.$$

Этим способом находится числитель A искомой дроби $\frac{A}{p-qz}$, и если из отдельных простых множителей знаменателя N, лишь бы они не были равны между собой, образовать простые дроби подобного рода, то сумма всех этих простых дробей будет равна данной функции.

ПРИМЕР

Если в предыдущем примере

$$\frac{1+z^2}{z-z^3},$$

где

$$M=1+z^2$$

и

$$N=z-z^3,$$

взять z в качестве простого множителя, то

$$S=1-z^2$$

и числитель происходящей отсюда простой дроби $\frac{A}{z}$ будет

$$A=\frac{1+z^2}{1-z^2}=1$$

при подстановке $z=0$, а это представляет то значение, которое получает z, если положить простой множитель z равным нулю. Подобным образом, если в качестве множителя знаменателя взять $1-z$, так что

$$S=z+z^2,$$

то будет

$$A=\frac{1+z^2}{z+z^2},$$

где полагаем $1-z=0$, откуда

$$A=1,$$

и из множителя $1-z$ получается дробь $\frac{1}{1-z}$.

Наконец, третий множитель $1+z$, поскольку

$$S=z-z^2$$

и

$$A=\frac{1+z^2}{z-z^2},$$

при подстановке $1+z=0$, или $z=-1$, даст

$$A=-1$$

и простую дробь, равную

$$\frac{-1}{1+z}.$$

Итак, при помощи этого правила получается

$$\frac{1+z^2}{z-z^3}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z},$$

как и раньше.

42. *Дробная функция вида* $\frac{P}{(p-qz)^n}$, *числитель которой* P *не содержит столь высокой степени* z, *как знаменатель* $(p-qz)^n$, *может быть*

преобразована в частные дроби такого вида:

$$\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}+\frac{D}{(p-qz)^{n-3}}+\ldots+\frac{K}{p-qz},$$

все числители которых являются постоянными количествами.

Так как наибольшая степень z в P меньше, чем z^n, то она будет z^{n-1}, так что P будет иметь такой вид:

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\ldots+\varkappa z^{n-1},$$

причем число членов равно n и этому должен быть равен числитель суммы всех частных дробей после приведения их к общему знаменателю $(p-qz)^n$; числитель же этот, таким образом, будет

$$A+B(p-qz)+C(p-qz)^2+D(p-qz)^3+\ldots+K(p-qz)^{n-1}.$$

Его наибольшая степень z есть, как и раньше, z^{n-1}; неизвестных букв A, B, C, ..., K (число которых равно n) будет столько, сколько нужно будет приравнять членов. Благодаря этому буквы A, B, C и т. д. могут быть определены так, что получится правильная дробная функция

$$\frac{P}{(p-qz)^n}=\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}+\frac{D}{(p-qz)^{n-3}}+\ldots+\frac{K}{p-qz}.$$

Мы сейчас изложим простой способ для нахождения этих числителей.

43. *Если знаменатель N дробной функции $\frac{M}{N}$ содержит множитель $(p-qz)^2$, то частные дроби, возникающие из этого множителя, могут быть найдены следующим образом.*

Раньше было показано, какого рода частные дроби получаются из отдельных простых множителей знаменателя, не имеющих себе равных; теперь положим, что два множителя равны между собой или что после их соединения множителем знаменателя N будет $(p-qz)^2$. Из этого множителя на основании предыдущего параграфа получаются две частные дроби:

$$\frac{A}{(p-qz)^2}+\frac{B}{p-qz}.$$

Пусть

$$N=(p-qz)^2 S;$$

тогда

$$\frac{M}{N}=\frac{M}{(p-qz)^2 S}=\frac{A}{(p-qz)^2}+\frac{B}{p-qz}+\frac{P}{S},$$

где $\frac{P}{S}$ означает все вместе взятые простые дроби, происшедшие из множителя S знаменателя; отсюда

$$\frac{P}{S}=\frac{M-AS-B(p-qz)S}{(p-qz)^2 S}$$

и

$$P=\frac{M-AS-B(p-qz)S}{(p-qz)^2}=\text{целой функции}.$$

Поэтому

$$M-AS-B(p-qz)S$$

должно делиться на $(p-qz)^2$. Начнем с того, что оно должно делиться на $p-qz$, тогда выражение

$$M-AS-B(p-qz)S$$

исчезает, если положить $p-qz=0$ или $z=\frac{p}{q}$. Поэтому подставим всюду $\frac{p}{q}$ вместо z; тогда $M-AS=0$, и, следовательно,

$$A=\frac{M}{S};$$

это значит, что дробь $\frac{M}{S}$ при подстановке везде $\frac{p}{q}$ вместо z даст постоянное значение A.

Теперь количество $M-AS-B(p-qz)S$ должно делиться также и на $(p-qz)^2$, т. е. $\frac{M-AS}{p-qz}-BS$ должно снова делиться на $p-qz$. Подставив везде $z=\frac{p}{q}$, получим

$$\frac{M-AS}{p-qz}=BS,$$

откуда

$$B=\frac{M-AS}{(p-qz)S}=\frac{1}{p-qz}\left(\frac{M}{S}-A\right),$$

причем надо заметить, что так как $M-AS$ делится на $p-qz$, то это деление следует произвести прежде, чем подставлять $\frac{p}{q}$ вместо z. Или же, полагая

$$\frac{M-AS}{p-qz}=T,$$

будем иметь

$$B=\frac{T}{S},$$

где положено $z=\frac{p}{q}$.

Найдя, таким образом, числители A и B, получим частные дроби, происшедшие от множителя $(p-qz)^2$ знаменателя N:

$$\frac{A}{(p-qz)^2}+\frac{B}{p-qz}.$$

ПРИМЕР 1

Пусть дана дробная функция

$$\frac{1-z^2}{z^2(1+z^2)};$$

для квадратного множителя z^2 знаменателя будет

$$S=1+z^2 \quad \text{и} \quad M=1-z^2.$$

Пусть частные дроби, происходящие от z^2, будут

$$\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z};$$

тогда

$$A = \frac{M}{S} = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Полагая множитель $z=0$, получим

$$A = 1.$$

Тогда $M - AS = -2z^2$, что после деления на простой множитель z даст

$$T = -2z;$$

отсюда

$$B = \frac{T}{S} = \frac{-2z}{1+z^2};$$

при $z=0$ будет

$$B = 0,$$

и, таким образом, из множителя z^2 знаменателя возникает единственная частная дробь $\frac{1}{z^2}$.

ПРИМЕР 2

Пусть дана дробная функция

$$\frac{z^3}{(1-z)^2(1+z^4)},$$

частные дроби которой, возникающие из квадрата $(1-z)^2$ в знаменателе, будут

$$\frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z}.$$

Тогда

$$M = z^3 \quad \text{и} \quad S = 1 + z^4;$$

поэтому

$$A = \frac{M}{S} = \frac{z^3}{1+z^4};$$

подставляя $1 - z = 0$ или $z = 1$, получим

$$A = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$M - AS = z^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^4 = -\frac{1}{2} + z^3 - \frac{1}{2}z^4,$$

что после деления на $1 - z$ даст

$$T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z^3;$$

поэтому

$$B = \frac{T}{S} = \frac{-1-z-z^2+z^3}{2+2z^4},$$

так что, полагая $z = 1$, получим

$$B = -\frac{1}{2}.$$

Значит, искомыми частными дробями будут

$$\frac{1}{2(1-z)^2}-\frac{1}{2(1-z)}.$$

44. *Если знаменатель N дробной функции $\frac{M}{N}$ имеет множитель $(p-qz)^3$, то частные дроби*

$$\frac{A}{(p-qz)^3}+\frac{B}{(p-qz)^2}+\frac{C}{p-qz},$$

возникающие от этого множителя, могут быть найдены следующим образом.

Положим

$$N=(p-qz)^3 S,$$

и пусть дробь, происходящая от множителя S, будет равна $\frac{P}{S}$; тогда

$$P=\frac{M-AS-B(p-qz)S-C(p-qz)^2S}{(p-qz)^3}=\text{целой функции.}$$

Следовательно, числитель

$$M-AS-B(p-qz)S-C(p-qz)^2S,$$

прежде всего, должен делиться на $p-qz$; поэтому он при $p-qz=0$ или $z=\frac{p}{q}$ должен исчезнуть; таким образом, будет $M-AS=0$, и, стало быть,

$$A=\frac{M}{S},$$

где положено $z=\frac{p}{q}$.

При найденном значении A, $M-AS$ будет делиться на $p-qz$; положим

$$\frac{M-AS}{p-qz}=T;$$

тогда

$$T-BS-C(p-qz)S$$

будет еще делиться на $(p-qz)^2$; значит, оно будет равно нулю при $p-qz=0$; отсюда

$$B=\frac{T}{S},$$

где положено $z=\frac{p}{q}$.

При найденном B выражение $T-BS$ будет делиться на $p-qz$. Поэтому, положив

$$\frac{T-BS}{p-qz}=V,$$

получаем, наконец, что

$$V-CS$$

будет делиться на $p-qz$, значит, при $p-qz=0$ будет $V-CS=0$, откуда

$$C=\frac{V}{S},$$

где положено $z=\frac{p}{q}$.

Найдя, таким образом, числители A, B, C, получим частные дроби

$$\frac{A}{(p-qz)^3}+\frac{B}{(p-qz)^2}+\frac{C}{p-qz},$$

возникшие от множителя $(p-qz)^3$ знаменателя N.

ПРИМЕР

Пусть дана дробная функция

$$\frac{z^2}{(1-z)^3(1+z^2)};$$

от кубического множителя $(1-z)^3$ ее знаменателя возникают частные дроби

$$\frac{A}{(1-z)^3}+\frac{B}{(1-z)^2}+\frac{C}{1-z}.$$

Тогда

$$M=z^2 \quad \text{и} \quad S=1+z^2;$$

отсюда, во-первых,

$$A=\frac{z^2}{1+z^2}$$

при $1-z=0$ или $z=1$, что дает

$$A=\frac{1}{2}.$$

Затем, если положить

$$T=\frac{M-AS}{1-z},$$

то будет

$$T=\frac{\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}}{1-z}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z;$$

отсюда

$$B=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z}{1+z^2}$$

при $z=1$, так что

$$B=-\frac{1}{2}.$$

Полагая далее

$$V=\frac{T-BS}{1-z}=\frac{T+\frac{1}{2}S}{1-z},$$

найдем

$$V=\frac{-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2}{1-z}=-\frac{1}{2}z;$$

отсюда

$$C=\frac{V}{S}=\frac{-\frac{1}{2}z}{1+z^2}$$

при $z=1$, так что

$$C=-\frac{1}{4}.$$

Таким образом, частные дроби, возникшие от множителя $(1-z)^3$ знаменателя, будут

$$\frac{1}{2(1-z)^3}-\frac{1}{2(1-z)^2}-\frac{1}{4(1-z)}.$$

45. *Если у дробной функции* $\frac{M}{N}$ *знаменатель* N *содержит множитель* $(p-qz)^n$, *то возникающие отсюда частные дроби*

$$\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}+\ldots+\frac{K}{p-qz}$$

могут быть найдены следующим образом.

Положим, что знаменатель

$$N=(p-qz)^n Z;$$

рассуждая, как раньше, найдем нижеследующее.

Во-первых,

$$A=\frac{M}{Z}$$

при $z=\frac{p}{q}$.

Положим

$$P=\frac{M-AZ}{p-qz};$$

тогда, во-вторых,

$$B=\frac{P}{Z}$$

при $z=\frac{p}{q}$.

Положим

$$Q=\frac{P-BZ}{p-qz};$$

тогда, в-третьих,

$$C=\frac{Q}{Z}$$

при $z=\frac{p}{q}$.

Положим

$$R=\frac{Q-CZ}{p-qz};$$

тогда, в-четвертых,

$$D=\frac{R}{Z}$$

при $z=\frac{p}{q}$.

Положим

$$S=\frac{R-DZ}{p-qz}$$

тогда, в-пятых,

$$E=\frac{S}{Z}$$

при $z=\frac{p}{q}$; и т. д.

По определении этим способом отдельных постоянных числителей A, B, C, D и т. д. будут найдены все частные дроби, происходящие от множителя $(p-qz)^n$ знаменателя N.

ПРИМЕР

Пусть дана дробная функция

$$\frac{1+z^2}{z^5(1+z^3)}$$

и пусть из множителя z^5 ее знаменателя получаются частные дроби

$$\frac{A}{z^5}+\frac{B}{z^4}+\frac{C}{z^3}+\frac{D}{z^2}+\frac{E}{z}.$$

Для нахождения их постоянных числителей имеем

$$M=1+z^2,\quad Z=1+z^3 \quad \text{и} \quad \frac{p}{q}=0.$$

Дальнейшее вычисление будет идти так.

Во-первых,

$$A=\frac{M}{Z}=\frac{1+z^2}{1+z^3}$$

при $z=0$; поэтому

$$A=1.$$

Полагая

$$P=\frac{M-AZ}{z}=\frac{z^2-z^3}{z}=z-z^2,$$

будем иметь, во-вторых,

$$B=\frac{P}{Z}=\frac{z-z^2}{1+z^3}$$

при $z=0$, значит,

$$B=0.$$

Полагая

$$Q=\frac{P-BZ}{z}=\frac{z-z^2}{z}=1-z,$$

будем иметь, в-третьих,

$$C=\frac{Q}{Z}=\frac{1-z}{1+z^3}$$

при $z=0$, значит,

$$C=1.$$

Полагая

$$R=\frac{Q-CZ}{z}=\frac{-z-z^3}{z}=-1-z^2,$$

будем иметь, в-четвертых,

$$D=\frac{R}{Z}=\frac{-1-z^2}{1+z^3}$$

при $z=0$, откуда

$$D=-1.$$

Полагая

$$S=\frac{R-DZ}{z}=\frac{-z^2+z^3}{z}=-z+z^2,$$

будем иметь, в-пятых,

$$E=\frac{S}{Z}=\frac{-z+z^2}{1+z^3}$$

при $z=0$, откуда

$$E=0.$$

Итак, искомые частные дроби будут:

$$\frac{1}{z^5}+\frac{0}{z^4}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^2}+\frac{0}{z}.$$

45bis[1]). *Какова бы ни была заданная рациональная дробная функция* $\frac{M}{N}$, *она разложится на части и преобразуется к наиболее простой форме следующим образом.*

Нужно найти все простые множители знаменателя N, действительные или мнимые; те из них, которые не имеют себе равных, рассматриваются поодиночке и для каждого, на основании § 41, выделяется частная дробь. Если же один и тот же простой множитель встречается дважды или много раз, то они берутся вместе, и для их произведения, которое будет степенью вида $(p-qz)^n$, подыскиваются соответственные частные дроби на основании § 45. Когда, таким образом, для отдельных простых множителей знаменателя будут получены частные дроби, то вся совокупность их будет равна заданной функции $\frac{M}{N}$, если только она не есть неправильная дробь; если бы она была неправильной дробью, то, сверх того, следовало бы исключить целую часть и прибавить ее к найденным частным дробям; таким образом получится значение функции $\frac{M}{N}$ в простейшей форме. При этом безразлично, находить ли частные дроби раньше извлечения целой части или после. В самом деле, из отдельных множителей знаменателя N получаются одни и те же частные дроби, будет ли взят сам числитель M, или он же, увеличенный либо уменьшенный на знаменатель, взятый целое число раз; в этом легко убедиться путем рассмотрения данных выше правил.

ПРИМЕР

Требуется найти значение функции

$$\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)},$$

выраженное в простейшей форме. Сперва берется простой множитель знаменателя $1+z$, который дает $\frac{p}{q}=-1$; тогда

$$M=1 \quad \text{и} \quad Z=z^3-2z^4+z^5.$$

[1]) В первом издании и этот параграф и следующий, относящийся уже к другой главе, были ошибочно помечены одним и тем же номером 46.

Отсюда для нахождения дроби $\frac{A}{1+z}$ имеем

$$A=\frac{1}{z^3-2z^4+z^5}$$

при $z=-1$, т. е.

$$A=-\frac{1}{4},$$

и из множителя $1+z$ получается частная дробь

$$-\frac{1}{4(1+z)}.$$

Теперь берется квадратный множитель $(1-z)^2$; он дает

$$\frac{p}{q}=1, \quad M=1 \quad \text{и} \quad Z=z^3+z^4.$$

Если обозначить происходящие отсюда частные дроби через

$$\frac{A}{(1-z)^2}+\frac{B}{1-z},$$

то будет

$$A=\frac{1}{z^3+z^4}$$

при $z=1$; поэтому

$$A=\frac{1}{2}.$$

Полагая

$$P=\frac{M-\frac{1}{2}Z}{1-z}=\frac{1-\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{2}z^4}{1-z}=1+z+z^2+\frac{1}{2}z^3,$$

получим

$$B=\frac{P}{Z}=\frac{1+z+z^2+\frac{1}{2}z^3}{z^3+z^4}$$

при $z=1$; следовательно,

$$B=\frac{7}{4},$$

и искомые частные дроби будут

$$\frac{1}{2(1-z)^2}+\frac{7}{4(1-z)}.$$

Наконец, третий, кубический, множитель z^3 дает

$$\frac{p}{q}=0, \quad M=1 \quad \text{и} \quad Z=1-z-z^2+z^3.$$

Итак, обозначив частные дроби через

$$\frac{A}{z^3}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z},$$

получим сперва

$$A=\frac{M}{Z}=\frac{1}{1-z-z^2+z^3}$$

при $z=0$, значит,

$$A=1.$$

Положим

$$P=\frac{M-Z}{z}=1+z-z^2;$$

тогда

$$B=\frac{P}{Z}$$

при $z=0$, значит,

$$B=1.$$

Положим

$$Q=\frac{P-Z}{z}=2-z^2;$$

тогда

$$C=\frac{Q}{Z}$$

при $z=0$, следовательно,

$$C=2.$$

Таким образом, данная функция

$$\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$$

представляется в такой форме:

$$\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z}+\frac{1}{2(1-z)^2}+\frac{7}{4(1-z)}-\frac{1}{4(1+z)}.$$

При этом не оказывается целой части, потому что предложенная дробь не является неправильной.

ГЛАВА III

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУНКЦИЙ ПУТЕМ ПОДСТАНОВОК

46. *Если y будет какой-либо функцией z, а z будет определяться посредством нового переменного x, то y также может быть определено посредством x.*

Итак, раньше y было функцией z, а теперь вводится новое переменное количество x, посредством которого определится каждое из предыдущих как y, так и z. Так, если было

$$y=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

и полагаем

$$z=\frac{1-x}{1+x},$$

то после подстановки этого значения вместо z получится

$$y=\frac{2x}{1+x^2}.$$

Если взять для x какое-либо определенное значение, то из него можно найти определенные значения для z и для y, и, таким образом, находится значение переменного y, соответствующее тому значению z, которое получилось одновременно с ним. Так, если $x=\frac{1}{2}$, то $z=\frac{1}{3}$ и $y=\frac{4}{5}$; значение $y=\frac{4}{5}$ можно также найти, если в выражение $\frac{1-z^2}{1+z^2}$, равное y, подставить $z=\frac{1}{3}$.

Введение такого нового переменного применяется для двоякой цели: либо этим уничтожается иррациональность, входящая в данное выражение y через z, либо оно применяется в том случае, когда из-за высокой степени уравнения, посредством которого выражается соотношение между y и z, нельзя получить явной функции z, равной y; тогда вводится новая переменная x, посредством которой могут быть удобно определены как y, так и z. Уже из этого в достаточной мере выясняется значительная польза подстановок; из дальнейшего же это будет видно гораздо яснее [9].

47. *Если дано*

$$y=\sqrt{a+bz},$$

то новое переменное x, посредством которого z и y выражаются рационально, может быть найдено следующим образом.

Как z, так и y должны быть рациональными функциями переменного x; этого, очевидно, можно достигнуть, положив

$$\sqrt{a+bz}=bx.$$

Получим сперва

$$y=bx \quad \text{и} \quad a+bz=b^2x^2,$$

откуда

$$z=bx^2-\frac{a}{b}.$$

Таким образом, каждое из количеств y и z выражается рациональной функцией переменного x; именно, так как $y=\sqrt{a+bz}$, то положим

$$z=bx^2-\frac{a}{b}$$

и получим

$$y=bx.$$

48. *Если*

$$y=(a+bz)^{\frac{m}{n}},$$

то новое переменное x, посредством которого как y, так и z выражаются рационально, может быть найдено так.

Положим

$$y=x^m;$$

тогда

$$(a+bz)^{\frac{m}{n}}=x^m,$$

откуда

$$(a+bz)^{\frac{1}{n}}=x,$$

следовательно,

$$a+bz=x^n \quad \text{и} \quad z=\frac{x^n-a}{b}.$$

Так оба количества y и z будут определены рационально через x при помощи подстановки

$$z=\frac{x^n-a}{b},$$

которая дает

$$y=x^m.$$

Хотя ни y через z, ни, обратно, z через y рационально выразить нельзя, однако каждая из этих функций стала, вполне удобно, рациональной функцией нового переменного количества x, введенного путем подстановки.

49. *Пусть*

$$y=\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{\frac{m}{n}};$$

требуется найти новое переменное количество x, посредством которого и y и z выражались бы рационально.

Прежде всего ясно, что можно удовлетворить требованию, подставив

$$y = x^m;$$

если

$$\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{\frac{m}{n}} = x^m,$$

то

$$\frac{a+bz}{f+gz} = x^n,$$

и из этого уравнения выводим

$$z = \frac{a-fx^n}{gx^n-b},$$

и такая подстановка дает

$$y = x^m.$$

Отсюда также понятно, что если

$$\left(\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y}\right)^n = \left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^m,$$

то y и z выразятся рационально через x, если каждое из выражений положить равным x^{mn}; действительно, получим

$$y = \frac{\alpha-\gamma x^m}{\delta x^m-\beta}$$

и

$$z = \frac{a-fx^n}{gx^n-b};$$

этот случай никаких затруднений не представляет.

50. *Если*

$$y = \sqrt{(a+bz)(c+dz)},$$

то удобная подстановка, посредством которой y и z выражались бы рационально, может быть найдена таким образом.

Положим

$$\sqrt{(a+bz)(c+dz)} = (a+bz)\,x;$$

в самом деле, легко видеть, что отсюда получится для z рациональное выражение, потому что значение переменного z определяется простым уравнением. Именно, будет

$$c+dz = (a+bz)\,x^2,$$

откуда

$$z = \frac{c-ax^2}{bx^2-d}.$$

Затем

$$a+bz = \frac{bc-ad}{bx^2-d},$$

и так как $y = \sqrt{(a+bz)(c+dz)} = (a+bz)\,x$, то получаем

$$y = \frac{(bc-ad)\,x}{bx^2-d}.$$

Итак, иррациональная функция $y=\sqrt{(a+bz)(c+dz)}$ приводится к рациональному виду путем подстановки

$$z=\frac{c-ax^2}{bx^2-d},$$

так как последняя дает

$$y=\frac{(bc-ad)\,x}{bx^2-d}.$$

Так, если будет

$$y=\sqrt{a^2-z^2}=\sqrt{(a+z)(a-z)},$$

то $b=+1$, $c=a$, $d=-1$; подставляя

$$z=\frac{a-ax^2}{1+x^2},$$

получим

$$y=\frac{2ax}{1+x^2}.$$

Всякий раз, как выражение под знаком $\sqrt{\ }$ содержит два простых действительных множителя, приведение к рациональному виду производится этим способом; если же два простых множителя будут мнимыми, то лучше пользоваться следующим приемом.

51. *Пусть*

$$y=\sqrt{p+qz+rz^2};$$

требуется найти удобную подстановку для z, чтобы выражение для y стало рациональным.

Сделать это можно многими способами, смотря по тому, будут ли p и q количествами положительными или отрицательными. Пусть сперва p — положительное количество; подставим a^2 вместо p; конечно, p может вовсе и не быть квадратом, однако иррациональность постоянных количеств не играет здесь никакой роли. Итак, пусть

I. $y=\sqrt{a^2+bz+cz^2}$ и положим

$$\sqrt{a^2+bz+cz^2}=a+xz;$$

тогда

$$b+cz=2ax+x^2z,$$

откуда

$$z=\frac{b-2ax}{x^2-c};$$

затем

$$y=a+xz=\frac{bx-ax^2-ac}{x^2-c};$$

таким образом, z и y являются рациональными функциями x.

Пусть теперь

II. $y=\sqrt{a^2z^2+bz+c}$ и положим

$$\sqrt{a^2z^2+bz+c}=az+x;$$

тогда

$$bz+c=2axz+x^2,$$

и

$$z=\frac{x^2-c}{b-2ax}.$$

Затем получится

$$y=az+x=\frac{-ac+bx-ax^2}{b-2ax}.$$

III. Если p и r будут количествами отрицательными, тогда, если не будет $q^2>4pr$, значение y всегда будет мнимым. В случае же $q^2>4pr$, выражение $p+qz+rz^2$ может быть разложено на два множителя, каковой случай относится к предыдущему параграфу. Часто, однако, бывает удобнее приводить к форме

$$y=\sqrt{a^2+(b+cz)(d+ez)}.$$

Для представления ее в рациональном виде положим

$$y=a+(b+cz)\,x;$$

тогда

$$d+ez=2ax+bx^2+cx^2z,$$

откуда

$$z=\frac{d-2ax-bx^2}{cx^2-e}$$

и

$$y=\frac{-ae+(cd-be)\,x-acx^2}{cx^2-e}.$$

Иногда более удобным может оказаться приведение к форме

$$y=\sqrt{a^2z^2+(b+cz)(d+ez)}.$$

Тогда полагаем

$$y=az+(b+cz)\,x;$$

получаем

$$d+ez=2axz+bx^2+cx^2z$$

и

$$z=\frac{bx^2-d}{e-2ax-cx^2},$$

а затем

$$y=\frac{-ad+(be-cd)\,x-abx^2}{e-2ax-cx^2}.$$

ПРИМЕР

Пусть дана иррациональная функция z

$$y=\sqrt{-1+3z-z^2};$$

так как ее можно привести к виду

$$y=\sqrt{1-2+3z-z^2}=\sqrt{1-(1-z)(2-z)},$$

то положим

$$y = 1 - (1 - z)\,x;$$

тогда

$$-2 + z = -2x + x^2 - x^2 z$$

и

$$z = \frac{2 - 2x + x^2}{1 + x^2}.$$

Затем получаем

$$1 - z = \frac{-1 + 2x}{1 + x^2}$$

и

$$y = 1 - (1 - z)\,x = \frac{1 + x - x^2}{1 + x^2}.$$

Это — почти все случаи, которые разрешает неопределенная алгебра или метод Диофанта, и в других, отличных от здесь рассмотренных, случаях приведение к рациональному виду путем рациональной подстановки произвести нельзя. Поэтому я перехожу к изложению другого применения подстановок.

52. *Пусть y будет функцией переменной z вида*

$$ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0$$

от переменного z; надо найти новое переменное x, посредством которого значения y и z могли бы быть выражены явно.

Так как общего способа решения уравнений не существует, то из данного уравнения $ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0$ ни y через z, ни, обратно, z через y выразить нельзя. Чтобы преодолеть это затруднение, положим

$$y = x^m z^n;$$

получим

$$ax^{\alpha m} z^{\alpha n} + bz^\beta + cx^{\gamma m} z^{\gamma n + \delta} = 0.$$

Теперь определим показатель n так, чтобы из этого уравнения можно было найти значение переменного z, что можно сделать тремя способами.

I. Пусть

$$\alpha n = \beta$$

и, значит,

$$n = \frac{\beta}{\alpha};$$

тогда, разделив уравнение на $z^{\alpha n} = z^\beta$, получим

$$ax^{\alpha m} + b + cx^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = 0,$$

откуда

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}}$$

или

$$z=\left(\frac{-ax^{\alpha m}-b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma-\alpha\beta+\alpha\delta}},$$

и

$$y=x^{m}\left(\frac{-ax^{\alpha m}-b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma-\alpha\beta+\alpha\delta}}.$$

II. Пусть

$$\beta=\gamma n+\delta,\quad \text{т. е.}\quad n=\frac{\beta-\delta}{\gamma};$$

тогда, разделив уравнение на z^{β}, найдем

$$ax^{\alpha m}z^{\alpha n-\beta}+b+cx^{\gamma m}=0,$$

откуда

$$z=\left(\frac{-b-cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha n-\beta}}=\left(\frac{-b-cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\gamma}}$$

и

$$y=x^{m}\left(\frac{-b-cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\beta-\delta}{\alpha\beta-\alpha\delta-\beta\gamma}}.$$

III. Пусть

$$\alpha n=\gamma n+\delta,\quad \text{или}\quad n=\frac{\delta}{\alpha-\gamma};$$

тогда, разделив уравнение на $z^{\alpha n}$, находим

$$ax^{\alpha m}+bz^{\beta-\alpha n}+cx^{\gamma m}=0;$$

отсюда получается

$$z=\left(\frac{-ax^{\alpha m}-cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha n}}=\left(\frac{-ax^{\alpha m}-cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\delta}}$$

и

$$y=x^{m}\left(\frac{-ax^{\alpha m}-cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\delta}{\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\delta}}.$$

Итак, тремя различными способами получены функции переменного x, равные z и y. Впрочем, вместо m можно подставлять любое число, исключая нуль; таким путем формулы могут быть приводимы к наиболее удобному выражению.

ПРИМЕР

Пусть природа функции y выражается уравнением

$$y^{3}+z^{3}-cyz=0$$

и требуется найти функции x, равные y и z. Имеем

$$a=-1,\quad b=-1,\quad \alpha=3,\ \beta=3,\quad \gamma=1\ \text{и}\ \delta=1$$

Отсюда первый способ дает при $m=1$

$$z=\left(\frac{x^3+1}{cx}\right)^{-1} \quad \text{и} \quad y=x\left(\frac{x^3+1}{cx}\right)^{-1}$$

или

$$z=\frac{cx}{1+x^3} \quad \text{и} \quad y=\frac{cx^2}{1+x^3};$$

каждое из этих выражений к тому же рационально.

Второй способ дает такие значения:

$$z=\left(\frac{cx-1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{и} \quad y=x\left(\frac{cx-1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

или

$$z=\frac{1}{x}\sqrt[3]{cx-1} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx-1)^2}.$$

Третий способ дает

$$z=(cx-x^3)^{\frac{2}{3}} \quad \text{и} \quad y=x(cx-x^3)^{\frac{1}{3}}.$$

53. *Отсюда a posteriori становится понятным, какого рода уравнения, посредством которых значение функции y определяется через z, могут быть решены этим способом при помощи введения переменного x.*

Действительно, положим, что в найденном уже решении получилось

$$z=\left(\frac{ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+\text{ и т. д.}}{A+Bx^\mu+Cx^\nu+\text{ и т. д.}}\right)^{\frac{p}{r}}$$

и

$$y=\left(\frac{ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+\text{ и т. д.}}{A+Bx^\mu+Cx^\nu+\text{ и т. д.}}\right)^{\frac{q}{r}}$$

и что, следовательно, будет

$$y^p=x^pz^q,$$

и, значит,

$$x=yz^{-\frac{q}{p}}.$$

Так как

$$z^{\frac{r}{p}}=\frac{ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+\text{ и т. д.}}{A+Bx^\mu+Cx^\nu+\text{ и т. д.}},$$

то, если вместо x подставим его значение $yz^{-\frac{q}{p}}$, получим уравнение

$$z^{\frac{r}{p}}=\frac{ay^\alpha z^{-\frac{\alpha q}{p}}+by^\beta z^{-\frac{\beta q}{p}}+cy^\gamma z^{-\frac{\gamma q}{p}}+\text{ и т. д.}}{A+By^\mu z^{-\frac{\mu q}{p}}+Cy^\nu z^{-\frac{\nu q}{p}}+\text{ и т. д.}},$$

которое приводится к такому:

$$Az^{\frac{r}{p}}+By^\mu z^{\frac{r-\mu q}{p}}+Cy^\nu z^{\frac{r-\nu q}{p}}+\text{ и т. д.}=$$

$$=ay^\alpha z^{-\frac{\alpha q}{p}}+by^\beta z^{-\frac{\beta q}{p}}+cy^\gamma z^{-\frac{\gamma q}{p}}+\text{ и т. д.};$$

после умножения на $z^{\frac{\alpha q}{p}}$ оно перейдет в

$$Az^{\frac{\alpha q+r}{p}} + By^{\mu}z^{\frac{\alpha q-\mu q+r}{p}} + Cy^{\nu}z^{\frac{\alpha q-\nu q+r}{p}} + \text{ и т. д.} =$$
$$= ay^{\alpha} + by^{\beta}z^{\frac{\alpha q-\beta q}{p}} + cy^{\gamma}z^{\frac{\alpha q-\gamma q}{p}} + \text{ и т. д.}$$

Положим

$$\frac{\alpha q+r}{p} = m \quad \text{и} \quad \frac{\alpha q-\beta q}{p} = n;$$

тогда будет [10]

$$p = \alpha - \beta, \quad q = n \quad \text{и} \quad r = \alpha m - \beta m - \alpha n,$$

и получится такое уравнение:

$$Az^{m} + By^{\mu}z^{m-\frac{\mu n}{\alpha-\beta}} + Cy^{\nu}z^{m-\frac{\nu n}{\alpha-\beta}} + \text{ и т. д.} =$$
$$= ay^{\alpha} + by^{\beta}z^{n} + cy^{\gamma}z^{\frac{(\alpha-\gamma)n}{\alpha-\beta}} + \text{ и т. д.};$$

оно согласно сказанному решается так, что получится

$$z = \left(\frac{ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+\text{ и т. д.}}{A+Bx^{\mu}+Cx^{\nu}+\text{ и т. д.}}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha m-\beta m-\alpha n}}$$

и

$$y = x\left(\frac{ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+\text{ и т. д.}}{A+Bx^{\mu}+Cx^{\nu}+\text{ и т. д.}}\right)^{\frac{n}{\alpha m-\beta m-\alpha n}}.$$

Или положим

$$\frac{\alpha q+r}{p} = m \quad \text{и} \quad \frac{\alpha q-\mu q+r}{p} = n;$$

тогда

$$m-n = \frac{\mu q}{p} \quad \text{и} \quad \frac{q}{p} = \frac{m-n}{\mu},$$

а также

$$\frac{r}{p} = m - \frac{\alpha m-\alpha n}{\mu}.$$

Отсюда

$$p = \mu, \quad q = m-n \quad \text{и} \quad r = \mu m - \alpha m + \alpha n,$$

так что имеем уравнение

$$Az^{m} + By^{\mu}z^{n} + Cy^{\nu}z^{m-\frac{\nu(m-n)}{\mu}} + \text{и т. д.} =$$
$$= ay^{\alpha} + by^{\beta}z^{\frac{(\alpha-\beta)(m-n)}{\mu}} + cy^{\gamma}z^{\frac{(\alpha-\gamma)(m-n)}{\mu}} + \text{и т. д.},$$

решая которое, получим:

$$z = \left(\frac{ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+\text{ и т. д.}}{A+Bx^{\mu}+Cx^{\nu}+\text{ и т. д.}}\right)^{\frac{\mu}{\mu m-\alpha m+\alpha n}}$$

и

$$y = x\left(\frac{ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+\text{ и т. д.}}{A+Bx^{\mu}+Cx^{\nu}+\text{ и т. д.}}\right)^{\frac{m-n}{\mu m-\alpha m+\alpha n}}.$$

54. *Если y зависит от z таким образом, что*

$$ay^2 + byz + cz^2 + dy + ez = 0,$$

то как y, так и z выразятся рационально через новое переменное x следующим образом.

Положим $y = xz$; после деления на z будет

$$ax^2z + bxz + cz + dx + e = 0,$$

откуда находим

$$z = \frac{-dx - e}{ax^2 + bx + c} \quad \text{и} \quad y = \frac{-dx^2 - ex}{ax^2 + bx + c}.$$

Добавим, что к заданной форме может быть приведено также уравнение между y и z

$$ay^2 + byz + cz^2 + dy + ez + f = 0,$$

путем уменьшения или увеличения любого из переменных на некоторое определенное постоянное количество; так что и это уравнение может быть выражено рационально через новое переменное x.

55. *Если y зависит от z таким образом, что*

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + ey^2 + fyz + gz^2 = 0,$$

то как y, так и z могут быть выражены рационально через новое переменное x следующим образом.

Положим $y = xz$; после подстановки все уравнение можно будет разделить на z^2 и получится

$$ax^3z + bx^2z + cxz + dz + ex^2 + fx + g = 0,$$

отсюда

$$z = \frac{-ex^2 - fx - g}{ax^3 + bx^2 + cx + d},$$

а затем

$$y = \frac{-ex^3 - fx^2 - gx}{ax^3 + bx^2 + cx + d}.$$

Исходя из этих случаев, нетрудно усмотреть, каким образом должны быть составлены уравнения высших степеней, которыми y определяется через z, чтобы такого рода решение могло иметь место. Впрочем, эти случаи содержатся в указанных выше формулах § 53; но так как общие формулы не так легко приспособить к случаям этого рода, более часто встречающимся, то я и счел нужным некоторые из них разобрать отдельно.

56. *Если y зависит от z так, что*

$$ay^2 + byz + cz^2 = d,$$

то оба количества y и z выразятся через новое переменное x таким образом.

Положим $y = xz$; тогда

$$(ax^2 + bx + c)\, z^2 = d$$

и затем

$$z = \sqrt{\frac{d}{ax^2 + bx + c}}.$$

и

$$y = x\sqrt{\frac{d}{ax^2+bx+c}}\,.$$

Подобным образом, если будет

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fz,$$

то при $y = xz$ уравнение после деления на z даст

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)\,z^2 = ex + f;$$

отсюда

$$z = \sqrt{\frac{ex+f}{ax^3+bx^2+cx+d}}$$

и

$$y = x\sqrt{\frac{ex+f}{ax^3+bx^2+cx+d}}\,.$$

Впрочем, эти случаи, а также другие, допускающие подобные решения, содержатся в следующем параграфе.

57. *Если y зависит от z так, что*

$$ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \text{ и т. д.} =$$
$$= \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \text{ и т. д.},$$

то как z, так и y удобно выразятся через новое переменное x следующим образом.

Пусть $y = xz$; после подстановки можно будет разделить все уравнение на z^n, если только показатель m больше, чем n; тогда получится

$$(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \text{ и т. д.})\,z^{m-n} =$$
$$= \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{ и т. д.};$$

отсюда

$$z = \left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{ и т. д.}}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \text{ и т. д.}}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

и

$$y = x\left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{ и т. д.}}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \text{ и т. д.}}\right)^{\frac{1}{m-n}}.$$

Это решение, конечно, имеет место тогда, когда в уравнении, выражающем природу функции y через z, везде встречается только двоякое число измерений y и z; так, в рассмотренном случае число измерений в отдельных членах есть либо m, либо n.

58. *Если в уравнении между y и z встречаются измерения троякого рода, высшее из которых настолько превосходит среднее, насколько это среднее превышает низшее, то переменные y и z могут быть выражены через новое переменное x путем решения квадратного уравнения.*

Действительно, если положить $y = xz$, то после деления на наименьшую степень переменного z значение z выразится через x посредством извлечения квадратного корня, как это будет видно на следующих примерах.

ПРИМЕР 1

Пусть

$$ay^3+by^2z+cyz^2+dz^3=2ey^2+2fyz+2gz^2+hy+iz$$

и положим $y=xz$; тогда по разделении на z будет

$$(ax^3+bx^2+cx+d)z^2=2(ex^2+fx+g)z+hx+i;$$

отсюда получится для z такое значение:

$$z=\frac{ex^2+fx+g\pm\sqrt{(ex^2+fx+g)^2+(ax^3+bx^2+cx+d)(hx+i)}}{ax^3+bx^2+cx+d},$$

найдя которое, будем иметь $y=xz$.

ПРИМЕР 2

Пусть

$$y^5=2az^3+by+cz;$$

если положить $y=xz$, то

$$x^5z^4=2az^2+bx+c,$$

откуда

$$z^2=\frac{a\pm\sqrt{a^2+bx^6+cx^5}}{x^5}$$

и, стало быть,

$$z=\frac{\sqrt{a\pm\sqrt{a^2+bx^6+cx^5}}}{x^2\sqrt{x}},\qquad y=\frac{\sqrt{a\pm\sqrt{a^2+bx^6+cx^5}}}{x\sqrt{x}}.$$

ПРИМЕР 3

Пусть

$$y^{10}=2ayz^6+byz^3+cz^4,$$

где встречаются измерения 10, 7 и 4; положим $y=xz$; тогда уравнение по разделении на z^4 перейдет в такое:

$$x^{10}z^6=2axz^3+bx+c$$

или

$$z^6=\frac{2axz^3+bx+c}{x^{10}},$$

откуда

$$z^3=\frac{ax\pm x\sqrt{a^2+bx^9+cx^8}}{x^{10}},$$

и, стало быть,

$$z=\frac{\sqrt[3]{a\pm\sqrt{a^2+bx^9+cx^8}}}{x^3},\qquad y=\frac{\sqrt[3]{a\pm\sqrt{a^2+bx^9+cx^8}}}{x^2}.$$

Из этих примеров вполне ясно применение подстановок подобного рода.

ГЛАВА IV

О ВЫРАЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

59. *Так как дробные и иррациональные функции переменного z не содержатся в целом виде $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ и т. д. с конечным числом членов, то обычно ищут такого рода бесконечные выражения, которые представляли бы значение любой функции — дробной или иррациональной. Даже природа трансцендентных функций считается более понятной, когда они выражены в этом хотя и бесконечном виде.*

Как природа целой функции видна лучше всего, если эта функция разложена по различным степеням z, т. е. если она приведена к форме $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ и т. д., — так эта же форма кажется наиболее удобной для восприятия разумом природных свойств всех остальных функций, если даже число членов окажется в действительности бесконечным. Ясно, что никакую нецелую функцию переменного z нельзя выразить конечным числом членов вида

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+ \text{ и т. д.},$$

потому что тогда функция была бы целой; если же кто-либо сомневается, что можно выразить функцию посредством бесконечного ряда членов подобного рода, то это сомнение устранится самим разложением той или иной функции. Но для большей общности этого утверждения следует допустить, кроме степеней переменного z с целыми положительными показателями, еще какие угодно степени. В таком случае не будет никакого сомнения в том, что всякая функция z может быть преобразована в такое бесконечное выражение:

$$Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+ \text{ и т. д.},$$

где показатели α, β, γ, δ и т. д. обозначают любые числа.

60. *Путем непрерывного деления можно разложить дробь*

$$\frac{a}{\alpha+\beta z}$$

в бесконечный ряд

$$\frac{a}{\alpha}-\frac{a\beta z}{\alpha^2}+\frac{a\beta^2z^2}{\alpha^3}-\frac{a\beta^3z^3}{\alpha^4}+\frac{a\beta^4z^4}{\alpha^5}- \text{ и т. д.},$$

который вследствие того, что отношение любого члена к следующему *за ним является постоянным отношением* $\left(1 : -\frac{\beta z}{\alpha}\right)$, *называется геометрическим рядом.*

Этот ряд можно также найти, не зная его происхождения; положим

$$\frac{a}{\alpha+\beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ и т. д.},$$

и пусть для осуществления равенства надо найти коэффициенты A, B, C, D и т. д. Тогда будет

$$a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{ и т. д.}),$$

а после того, как будет произведено умножение, получится

$$\begin{aligned} a = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{ и т. д.} \\ + \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Поэтому должно быть

$$a = \alpha A \text{ и, значит, } A = \frac{a}{\alpha};$$

сумму же коэффициентов при каждой степени переменного z следует положить равной нулю; отсюда получаются уравнения

$$\begin{aligned} \alpha B + \beta A &= 0, \\ \alpha C + \beta B &= 0, \\ \alpha D + \beta C &= 0, \\ \alpha E + \beta D &= 0 \\ &\text{и т. д.}; \end{aligned}$$

найдя любой коэффициент, легко получить следующий; если коэффициент какого-либо члена равен P, а следующий равен Q, то будет

$$\alpha Q + \beta P = 0 \quad \text{или} \quad Q = -\frac{\beta P}{\alpha}.$$

Но так как первый член A найден равным $\frac{a}{\alpha}$, то из него определяются следующие буквы: B, C, D и т. д. таким же образом, как они получились при делении. Исследуя бесконечный ряд для $\frac{a}{\alpha+\beta z}$, нетрудно убедиться, что коэффициент при степени z^n будет равен $\pm\frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$, где знак плюс имеет место, когда число n четное, знак же минус, — когда число n нечетное, т. е. коэффициент будет равен $\frac{a}{\alpha}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n$.

61. *Подобным образом путем непрерывного деления может быть обращена в бесконечный ряд дробная функция*

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}.$$

Впрочем, так как деление утомительно, и притом оно не так легко выявляет природу бесконечного ряда, то будет удобнее в качестве искомого написать произвольный ряд[1]) и затем определить [его] указанным выше способом. Итак, пусть

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{и т. д.};$$

[1]) Commodius erit seriem quesitam fingere.

помножим обе части на $\alpha+\beta z+\gamma z^2$; тогда получим

$$\begin{aligned} a+bz = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{ и т. д.} \\ + \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{ и т. д.} \\ + \gamma Az^2 + \gamma Bz^3 + \gamma Cz^4 + \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\alpha A = a; \quad \alpha B + \beta A = b,$$

откуда находим

$$A = \frac{a}{\alpha} \quad \text{и} \quad B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2};$$

остальные же буквы определятся из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &\alpha C + \beta B + \gamma A = 0, \\ &\alpha D + \beta C + \gamma B = 0, \\ &\alpha E + \beta D + \gamma C = 0, \\ &\alpha F + \beta E + \gamma D = 0 \text{ и т. д.}; \end{aligned}$$

отсюда по любым двум соседним коэффициентам находится следующий. Так, если два соседних коэффициента будут P и Q, а следующий R, то будет

$$\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0 \quad \text{или} \quad R = \frac{-\beta Q - \gamma P}{\alpha}.$$

А так как две первые буквы A и B уже найдены, то все следующие C, D, E, F и т. д. можно последовательно найти по ним, и, таким образом, будет получен бесконечный ряд $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ и т. д., равный данной дробной функции $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$.

ПРИМЕР

Пусть задана дробь

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2};$$

приравняем ей ряд

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{ и т. д.};$$

так как

$$a = 1, \quad b = 2, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -1,$$

то будет

$$A = 1, \quad B = 3,$$

и тогда

$$\begin{aligned} C = B + A, \quad D = C + B, \\ E = D + C, \quad F = E + D \\ \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Следовательно, любой коэффициент равен сумме двух предыдущих; поэтому, если найдены два соседних коэффициента P и Q, то следующий будет

$$R = P + Q.$$

Но так как два первых коэффициента A и B найдены, то данная дробь

$\frac{1+2z}{1-z-z^2}$ преобразуется в такой бесконечный ряд:

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+ \text{ и т. д.},$$

который без всякого труда можно продолжать сколько угодно.

62. Из этого уже достаточно видны природные свойства бесконечных рядов, в которые преобразуются дробные функции; именно, они сохраняют такого рода закономерность, что любой член может быть определен по нескольким предыдущим. А именно, если знаменатель данной дроби будет

$$\alpha+\beta z$$

и если бесконечный ряд принять в виде

$$A+Bz+Cz^2+\ldots+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+Sz^{n+3}+ \text{ и т. д.},$$

то любой коэффициент Q определится по одному только предыдущему P так, что будет

$$\alpha Q+\beta P=0.$$

Если же знаменателем будет трехчлен

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2,$$

то любой коэффициент R ряда определится по двум предыдущим Q и P так, что будет

$$\alpha R+\beta Q+\gamma P=0.$$

Подобным образом, если знаменателем будет четырехчлен

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3,$$

то любой коэффициент S ряда определится по трем предыдущим R, Q и P так, что будет

$$\alpha S+\beta R+\gamma Q+\delta P=0,$$

и так далее. Итак, в этих рядах любой член определяется по нескольким предыдущим согласно некоторому постоянному закону, причем этот закон сам собою определяется из знаменателя дроби, производящей этот ряд. Эти ряды, следуя знаменитому Моавру, который весьма обстоятельно изучал их природу, обычно называют *рекуррентными* [1]), потому что приходится возвращаться к предыдущим членам, если хотим узнать следующие [2]).

63. Далее, для образования этих рядов требуется, чтобы у знаменателя постоянный член α не был равен нулю; так как первый член этого ряда $A=\frac{a}{\alpha}$, то он, а за ним и все следующие станут бесконечными, если $\alpha=0$. Если исключить этот случай, который я разберу непосредственно далее, то дробная функция, которую нужно

---

[1]) По-латыни recurrere — возвращаться.

[2]) См. [41] (примечание к § 211). О рекуррентных рядах Эйлер подробно говорит в гл. XIII и XVII этой книги.

преобразовать в бесконечный рекуррентный ряд, имеет такой вид:

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ \text{ и т. д.}}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4- \text{ и т. д.}};$$

здесь первый член знаменателя я полагаю равным единице, так как дробь всегда может быть приведена к этому виду, если он не равен нулю; все же остальные члены знаменателя я рассматриваю как отрицательные, чтобы все члены полученного отсюда ряда были положительными. Если возникающий отсюда рекуррентный ряд принять равным

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+ \text{ и т. д.},$$

то коэффициенты определятся так:

$$\begin{aligned} &A=a,\\ &B=\alpha A+b,\\ &C=\alpha B+\beta A+c,\\ &D=\alpha C+\beta B+\gamma A+d,\\ &E=\alpha D+\beta C+\gamma B+\delta A+e\\ &\qquad\quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Таким образом, каждый коэффициент равен сумме кратных нескольких предыдущих коэффициентов, увеличенной на некоторое число, доставляемое числителем. Если только числитель не продолжается до бесконечности, то это присоединение слагаемого из числителя скоро закончится, и тогда любой член определится по нескольким предшествующим согласно постоянному закону.

Чтобы нигде не нарушался закон последовательного перехода[1]), следует брать правильную дробную функцию; если же взять неправильную дробь, то заключенная в ней целая часть прибавится к ряду, и в тех членах, которые она увеличит или уменьшит, она нарушит закон последовательности. Так, например, неправильная дробь

$$\frac{1+2z-z^3}{1-z-z^2}$$

даст такой ряд:

$$1+3z+4z^2+6z^3+10z^4+16z^5+26z^6+42z^7+ \text{ и т. д.},$$

где из закона, в силу которого любой коэффициент представляет сумму двух предыдущих, исключается четвертый член $6z^3$.

64. Особого рассмотрения заслуживают рекуррентные ряды, когда знаменатель дроби, из которой они получаются, есть степень. Так, если дробь

$$\frac{a+bz}{(1-\alpha z)^2}$$

разложить в ряд, то получится

$$\begin{aligned} &a+2\alpha az+3\alpha^2az^2+4\alpha^3az^3+5\alpha^4az^4+ \text{ и т. д.}\\ &\quad +bz+\ 2\alpha bz^2+3\alpha^2bz^3+4\alpha^3bz^4+ \text{ и т. д.}, \end{aligned}$$

[1]) lex progressionis.

где коэффициент при степени z^n будет

$$(n+1)\alpha^n a + n\alpha^{n-1} b.$$

Этот ряд будет рекуррентным, потому что любой член определяется по двум предыдущим; закон этого определения легко усмотреть из развернутого выражения знаменателя, именно $1-2\alpha z+\alpha^2 z^2$.

Если положить $\alpha=1$ и $z=1$, то ряд перейдет в общую арифметическую прогрессию

$$a+(2a+b)+(3a+2b)+(4a+3b)+ \text{ и т. д.},$$

у которой разности постоянны. Следовательно, всякая арифметическая прогрессия есть рекуррентный ряд; если

$$A+B+C+D+E+F+ \text{ и т. д.}$$

будет арифметической прогрессией, то

$$C=2B-A, \quad D=2C-B, \quad E=2D-C \text{ и т. д.}$$

65. Далее, дробь

$$\frac{a+bz+cz^2}{(1-\alpha z)^3},$$

поскольку

$$\frac{1}{(1-\alpha z)^3}=(1-\alpha z)^{-3}=1+3\alpha z+6\alpha^2 z^2+10\alpha^3 z^3+15\alpha^4 z^4+ \text{ и т. д.},$$

преобразуется в такой бесконечный ряд:

$$\begin{array}{llll} a+3\alpha az+6\alpha^2 az^2+10\alpha^3 az^3+15\alpha^4 az^4+ & \text{и т. д.} \\ +bz+3\alpha bz^2+6\alpha^2 bz^3+10\alpha^3 bz^4+ & \text{и т. д.} \\ +cz^2+3\alpha cz^3+6\alpha^2 cz^4+ & \text{и т. д.}, \end{array}$$

в котором степень z^n будет иметь коэффициент

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\alpha^n a+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\alpha^{n-1} b+\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}\alpha^{n-2} c.$$

Если же положить $\alpha=1$ и $z=1$, то ряд этот перейдет в общую прогрессию второго порядка, у которой вторые разности постоянны. Если

$$A+B+C+D+E+F+ \text{ и т. д.}$$

означает такого рода прогрессию, то она вместе с тем будет рекуррентным рядом, любой член которого определяется по трем предыдущим так:

$$D=3C-3B+A, \quad E=3D-3C+B, \quad F=3E-3D+C \text{ и т. д.}$$

Так как у членов арифметической прогрессии вторые разности также равны, именно равны нулю, то это свойство распространяется и на арифметические прогрессии.

66. Подобным образом дробь

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3}{(1-\alpha z)^4}$$

даст бесконечный ряд, в котором любая степень z^n будет иметь коэффициент

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^n a+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-1}b+$$
$$+\frac{(n-1)n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-2}c+\frac{(n-2)(n-1)n}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{n-3}d.$$

Если положить $\alpha=1$ и $z=1$, то этот ряд охватит собою все алгебраические прогрессии третьего порядка, у которых третьи разности постоянны. Действительно, все прогрессии этого порядка

$$A+B+C+D+E+F+ \text{ и т. д.}$$

вместе с тем будут рекуррентными, происходящими от знаменателя $1-4z+6z^2-4z^3+z^4$; отсюда будем иметь

$$E=4D-6C+4B-A,\quad F=4E-6D+4C-B \text{ и т. д.};$$

свойство это относится также ко всем прогрессиям низших порядков.

67. Этим путем можно показать, что все алгебраические прогрессии любого порядка, которые в окончательном результате приводят к постоянным разностям, будут рекуррентными рядами, закон которых определяется из знаменателя $(1-z)^n$, где число n больше того, которое указывает порядок прогрессии. Так как

$$a^m+(a+b)^m+(a+2b)^m+(a+3b)^m+ \text{ и т. д.}$$

представляет собой прогрессию порядка m, то по природе рекуррентных рядов будет

$$0=a^m-\frac{n}{1}(a+b)^m+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(a+2b)^m-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a+3b)^m+\ldots$$
$$\ldots\mp\frac{n}{1}[a+(n-1)b]^m\pm(a+nb)^m,$$

где надо взять верхние знаки, если n — число четное, и нижние, если n — нечетное. Это уравнение верно всегда, если n есть целое число, большее, чем m. Отсюда понятно, насколько общим является учение о рекуррентных рядах[1]).

68. Если знаменатель будет степенью не двучлена, а многочлена, то природа ряда также может быть уяснена другим способом. Пусть дана дробь

$$\frac{1}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^2-\delta z^4-\text{ и т. д.})^{m+1}};$$

возникающий отсюда бесконечный ряд будет

$$1+\frac{m+1}{1}\alpha z+\left.\begin{matrix}\dfrac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2}\alpha^2\\ +\dfrac{m+1}{1}\beta\end{matrix}\right\} z^2\ \left.\begin{matrix}+\dfrac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3\\ +\dfrac{(m+1)(m+2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta\\ +\dfrac{m+1}{1}\gamma\end{matrix}\right\} z^3+\text{и т. д.}$$

Для более глубокого изучения природы этого ряда представим его

[1]) К этому параграфу см. замечания в статье А. Шпайзера, стр. 7.

с помощью общих букв таким образом:

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\ldots+Kz^{n-3}+Lz^{n-2}+Mz^{n-1}+Nz^n+\text{ и т. д.},$$

причем любой коэффициент N определится посредством стольких предыдущих, сколько имеется букв α, β, γ, δ и т. д., в таком виде:

$$N=\frac{m+n}{n}\alpha M+\frac{2m+n}{n}\beta L+\frac{3m+n}{n}\gamma K+\frac{4m+n}{n}\delta I+\text{ и т. д.}$$

Хотя этот закон образования членов и не постоянен, но зависит от показателя степени z, тем не менее для этого же ряда подходит другой постоянный закон, который получается из развернутого выражения для знаменателя соответственно природе рекуррентных рядов. Но указанный непостоянный закон имеет место только тогда, когда числитель дроби есть единица или постоянное количество; если бы числитель содержал также несколько степеней z, то этот закон стал бы гораздо более сложным, что более легко будет выявить после изложения начал дифференциального исчисления.

69. До сих пор мы полагали, что первый постоянный член знаменателя не равен нулю, и на его место поставили единицу; теперь посмотрим, какого рода ряды получатся, если постоянный член в знаменателе исчезнет. В этих случаях дробная функция будет иметь вид

$$\frac{a+bz+cz^2+\text{ и т. д.}}{z(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{ и т. д.})};$$

если откинуть множитель z в знаменателе, то оставшуюся дробь

$$\frac{a+bz+cz^2+\text{ и т. д.}}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{ и т. д.}}$$

можно развернуть в рекуррентный ряд

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{ и т. д.},$$

и, очевидно, получим

$$\frac{a+bz+cz^2+\text{ и т. д.}}{z(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{ и т. д.})}=\frac{A}{z}+B+Cz+Dz^2+Ez^3+\text{ и т. д.}$$

Подобным образом будет

$$\frac{a+bz+cz^2+\text{ и т. д.}}{z^2(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{ и т. д.})}=\frac{A}{z^2}+\frac{B}{z}+C+Dz+Ez^2+\text{ и т. д.},$$

и вообще

$$\frac{a+bz+cz^2+\text{ и т. д.}}{z^m(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{ и т. д.})}=\frac{A}{z^m}+\frac{B}{z^{m-1}}+\frac{C}{z^{m-2}}+\frac{D}{z^{m-3}}+\text{ и т. д.},$$

каково бы ни было число m.

70. Так как посредством подстановки вместо z может быть введено в дробную функцию другое переменное x и этим путем любая дробная функция может быть преобразована в бесчисленные различные формы, то, таким образом, одна и та же дробная функция может быть выражена бесчисленными способами посредством рекуррентных рядов. Пусть, например, дана дробь

$$y=\frac{1+z}{1-z-z^2},$$

или, в форме рекуррентного ряда

$$y = 1 + 2z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 + \text{ и т. д.};$$

положим $z = \frac{1}{x}$, тогда

$$y = \frac{x^2+x}{x^2-x-1} = \frac{-x(1+x)}{1+x-x^2}.$$

Но

$$\frac{1+x}{1+x-x^2} = 1 + 0x + x^2 - x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 5x^6 - \text{ и т. д.};$$

отсюда будет

$$y = -x + 0x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + 3x^6 - 5x^7 + \text{ и т. д.}$$

Или положим

$$z = \frac{1-x}{1+x};$$

тогда

$$y = \frac{-2-2x}{1-4x-x^2},$$

откуда

$$y = -2 - 10x - 42x^2 - 178x^3 - 754x^4 - \text{ и т. д.};$$

такого рода рекуррентных рядов для y можно найти бесчисленное множество.

71. Иррациональные функции обычно преобразуются в бесконечные ряды по такой универсальной теореме [11]:

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} P^{\frac{m-n}{n}} Q + \frac{m(m-n)}{n \cdot 2n} P^{\frac{m-2n}{n}} Q^2 +$$
$$+ \frac{m(m-n)(m-2n)}{n \cdot 2n \cdot 3n} P^{\frac{m-3n}{n}} Q^3 + \text{ и т. д.};$$

члены эти, если $\frac{m}{n}$ не будет целым положительным числом, идут до бесконечности. Так, подставляя вместо m и n определенные числа, получаем

$$(P+Q)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} P^{-\frac{1}{2}} Q - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} P^{-\frac{3}{2}} Q^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} P^{-\frac{5}{2}} Q^3 - \text{ и т. д.},$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} P^{-\frac{3}{2}} Q + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} P^{-\frac{5}{2}} Q^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} P^{-\frac{7}{2}} Q^3 + \text{ и т. д.},$$

$$(P+Q)^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} P^{-\frac{2}{3}} Q - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} P^{-\frac{5}{3}} Q^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} P^{-\frac{8}{3}} Q^3 - \text{ и т. д.},$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{3}} = P^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} P^{-\frac{4}{3}} Q + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} P^{-\frac{7}{3}} Q^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} P^{-\frac{10}{3}} Q^3 + \text{ и т. д.},$$

$$(P+Q)^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} P^{-\frac{1}{3}} Q - \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 6} P^{-\frac{4}{3}} Q^2 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 9} P^{-\frac{7}{3}} Q^3 - \text{ т. д.}$$

и т. д.

72. Члены этих рядов следуют друг за другом таким образом, что любой может быть образован из предыдущего; так, если в ряде, получающемся из $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$, какой-либо член равен $MP^{\frac{m-kn}{n}}Q$, то следующий будет равен

$$\frac{m-kn}{(k+1)n}MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}}Q^{k+1}.$$

Следует заметить, что в каждом следующем члене показатель P уменьшается на единицу, а показатель Q, напротив, увеличивается на единицу. Чтобы легче было применить сказанное к любому случаю, можно общее выражение $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ представить так: $P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$; ведь, развернув формулу $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$ и помножив полученный ряд на $P^{\frac{m}{n}}$, получим вышеприведенный ряд. Далее, если m будет обозначать не только целые, но также и дробные числа, то ничто не мешает поставить вместо n единицу. После этого, если вместо $\frac{Q}{P}$, которое является функцией z, подставить Z, то будет

$$(1+Z)^m=1+\frac{m}{1}Z+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}Z^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}Z^3+\text{ и т. д.}$$

Для дальнейшего наблюдения законов последовательностей разложение общего выражения в ряд удобно обозначить так:

$$(1+Z)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}Z+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}Z^2+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}Z^3+\text{ и т. д.}$$

73. Пусть сначала

$$Z=\alpha z;$$

тогда

$$(1+\alpha z)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}\alpha z+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2z^2+$$
$$+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3z^3+\text{ и т. д.}$$

Напишем вместо этого ряда общее выражение

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\ldots+Mz^{n-1}+Nz^n+\text{ и т. д.};$$

при этом любой коэффициент N определяется из предыдущего M так, что

$$N=\frac{m-n}{n}\alpha M.$$

Так, если положить $n=1$, то, ввиду того, что $M=1$, будем иметь

$$N=A=\frac{m-1}{1}\alpha;$$

затем, если положить $n=2$, то, вследствие того, что $M=A=\frac{m-1}{1}\alpha$, будем иметь

$$N = B = \frac{m-2}{2}\alpha M = \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2;$$

подобным же образом дальше

$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3,$$

как указывает выведенный выше ряд.

74. Пусть $Z = \alpha z + \beta z^2$; тогда

$$(1+\alpha z+\beta z^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}(\alpha z+\beta z^2) + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha z+\beta z^2)^2 + \text{ и т. д.}$$

Если же расположить члены по степеням z, то будет

$$(1+\alpha z+\beta z^2)^{m-1} =$$

$$= 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + \text{ и т. д.}$$

$$+ \frac{m-1}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 + \text{ и т. д.}$$

Напишем вместо этого ряда общее выражение

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \text{ и т. д.};$$

любой коэффициент определяется по двум предыдущим так, что

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M + \frac{2m-n}{n}\beta L;$$

отсюда можно определить все члены по первому, которым является единица. Именно,

$$A = \frac{m-1}{1}\alpha, \qquad B = \frac{m-2}{2}\alpha A + \frac{2m-2}{2}\beta,$$

$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B + \frac{2m-3}{3}\beta A, \qquad D = \frac{m-4}{4}\alpha C + \frac{2m-4}{4}\beta B$$

и т. д.

75. Если $Z = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3$, то

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^{m-1} =$$

$$= 1 + \frac{m-1}{1}(\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3) + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^2 + \text{ и т. д.};$$

выражение это, если все члены расположить по степеням z, перейдет в ряд

$$1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + \text{ и т. д.}$$

$$+ \frac{m-1}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 + \text{ и т. д.}$$

$$+ \frac{m-1}{1}\gamma z^3 + \text{ и т. д.}$$

Чтобы лучше уяснить закон последовательности этого ряда, напишем вместо него

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\ldots+Kz^{n-3}+Lz^{n-2}+Mz^{n-1}+Nz^n+ \text{ и т. д.};$$

любой коэффициент этого ряда определяется по трем предыдущим так, что

$$N=\frac{m-n}{n}\alpha M+\frac{2m-n}{n}\beta L+\frac{3m-n}{n}\gamma K.$$

Так как первый член равен единице, а предыдущие — нули, то будет

$$A=\frac{m-1}{1}\alpha,$$

$$B=\frac{m-2}{2}\alpha A+\frac{2m-2}{2}\beta,$$

$$C=\frac{m-3}{3}\alpha B+\frac{2m-3}{3}\beta A+\frac{3m-3}{3}\gamma,$$

$$D=\frac{m-4}{4}\alpha C+\frac{2m-4}{4}\beta B+\frac{3m-4}{4}\gamma A,$$

$$E=\frac{m-5}{5}\alpha D+\frac{2m-5}{5}\beta C+\frac{3m-5}{5}\gamma B$$

и т. д.

76. Вообще, если положить

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+ \text{ и т. д.})^{m-1}=$$

$$=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{ и т. д.},$$

то отдельные члены этого ряда определятся по предыдущим так:

$$A=\frac{m-1}{1}\alpha,$$

$$B=\frac{m-2}{2}\alpha A+\frac{2m-2}{2}\beta,$$

$$C=\frac{m-3}{3}\alpha B+\frac{2m-3}{3}\beta A+\frac{3m-3}{3}\gamma,$$

$$D=\frac{m-4}{4}\alpha C+\frac{2m-4}{4}\beta B+\frac{3m-4}{4}\gamma A+\frac{4m-4}{4}\delta,$$

$$E=\frac{m-5}{5}\alpha D+\frac{2m-5}{5}\beta C+\frac{3m-5}{5}\gamma B+\frac{4m-5}{5}\delta A+\frac{5m-5}{5}\varepsilon$$

и т. д.

Именно, каждый член определяется посредством стольких предыдущих, сколько имеется букв α, β, γ, δ и т. д. в функции z, степень которой развертывается в ряд. Впрочем, сущность этого закона соответствует тому, что сказано выше в § 68, где мы развернули в бесконечный ряд подобное выражение $(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-$ и т. д.$)^{-m-1}$; ведь, если вместо m написать $-m$ и буквы α, β, γ, δ и т. д. считать отрицательными, то найденные ряды совпадут. Однако здесь не место обосновывать этот закон априорно, поскольку это можно будет сделать удобно лишь при помощи начал дифференциального исчисления; пока достаточно подтвердить справедливость его путем приложения к различным примерам.

ГЛАВА V

О ФУНКЦИЯХ ДВУХ И БОЛЕЕ ПЕРЕМЕННЫХ

77. Хотя мы до сих пор рассматривали много переменных количеств, однако они были составлены таким образом, что все являлись функциями одного, и если было определено одно, остальные также определялись. Теперь мы будем рассматривать такие переменные количества, которые друг от друга не зависят, так что если одному какому-нибудь дать определенное значение, то остальные все же останутся неопределенными и переменными. Такие переменные количества, пусть, например, x, y, z, будут соответствовать сущности этого понятия, если любое из них заключает в себе все определенные значения; при сравнении между собой они ничем не связаны, так как если мы вместо одного переменного, z, подставим любое определенное значение, то остальные переменные x и y все же будут такого же широкого охвата, как раньше. Различие между переменными количествами, взаимно друг от друга зависящими и не зависящими, состоит в том, что в первом случае, если определить одно, то вместе с тем определятся остальные; в последнем же случае определение одного вовсе не ограничивает значений остальных.

78. *Функция двух или более переменных количеств x, y, z есть выражение, составленное каким-либо образом из этих количеств.*

Так,

$$x^3 + xyz + az^2$$

будет функцией трех переменных количеств x, y, z. Эта функция при определении одного переменного, скажем z, т. е. при подстановке на его место постоянного числа, останется количеством переменным, именно, функцией x и y. А если, кроме z, определить также y, то и тогда все же получится функция переменного x. Такая функция многих переменных получит определенное значение не раньше, чем будут определены все отдельные переменные количества. Но так как одно переменное количество может быть определено бесчисленными способами, то функция двух переменных, поскольку она при любом определении одного из них может принять бесконечное число значений, в общем случае будет допускать бесконечно-бесконечное число значений. У функции трех переменных число значений будет еще в бесконечное число раз больше; оно будет расти дальше по мере увеличения числа переменных.

79. *Такие функции многих переменных, подобно функциям одного переменного, очень удобно разделяются на алгебраические и трансцендентные.*

Первые из них — это те, способ составления которых основывается только на алгебраических действиях, вторые — те, в образование которых входят также трансцендентные действия. Последние можно было бы снова различать по видам, смотря по тому, затрагивают ли трансцендентные действия все переменные количества, или некоторые, или же только одно. Так, выражение z^2+ylz ввиду присутствия логарифма будет трансцендентной функцией y и z; но ее следует считать не вполне трансцендентной по той причине, что если определить переменное z, то останется алгебраическая функция y. Однако не следует без нужды растягивать изложение подобного рода подразделениями.

80. *Алгебраические функции подразделяются затем на рациональные и иррациональные; рациональные же, далее, — на целые и дробные.*

Смысл этих названий вполне понятен уже из первой главы, именно: рациональная функция совершенно свободна от всякой иррациональности в тех переменных количествах, функцией которых она является; функция будет целой, если она не заключает никаких дробей, в противном же случае она будет дробной. Общий вид целой функции двух переменных y и z будет таков:

$$\alpha+\beta y+\gamma z+\delta y^2+\varepsilon yz+\zeta z^2+\eta y^3+\theta y^2z+\iota yz^2+\varkappa z^3+ \text{ и т. д.}$$

Если P и Q будут означать целые функции подобного рода, то $\frac{P}{Q}$ будет общей формой дробных функций. Наконец, иррациональная функция может быть явной и неявной; первая раскрыта вполне при помощи знаков радикалов, вторая же выражается посредством неразрешимого уравнения; так V будет неявной иррациональной функцией y и z, если

$$V^5=(ayz+z^3)V^2+(y^4+z^4)V+y^5+2ayz^3+z^5.$$

81. *Затем и у этих функций точно так же, как у тех, которые образованы из одного переменного, следует обратить внимание на многозначность.*

Так, рациональные функции будут однозначными, потому что при определении каждого из переменных количеств они дают единственное определенное значение. Пусть P, Q, R, S и т. д. означают рациональные или однозначные функции переменных x, y, z, тогда V, определяемое уравнением

$$V^2-PV+Q=0,$$

будет двузначной функцией тех же переменных: какие бы определенные значения ни давались количествам x, y и z, функция V постоянно будет иметь не одно, а два определенных значения. Подобным образом V будет трехзначной функцией, если

$$V^3-PV^2+QV-R=0;$$

таким же образом обстоит дело и с дальнейшими многозначными функциями.

82. Если функция одного переменного z приравнивается нулю, то переменное количество z принимает либо одно определенное значение,

либо несколько; точно так же, если функцию двух переменных y и z положить равной нулю, то в таком случае одно переменное определяется посредством другого, и оказывается, следовательно, его функцией, хотя раньше они друг от друга взаимно не зависели. Подобным образом, если функцию трех переменных x, y, z положить равной нулю, то одно из переменных определяется при помощи двух остальных и оказывается функцией их. То же самое получается, если фукнцию положить равной не нулю, но постоянному количеству или даже другой функции; из всякого уравнения, сколько бы переменных оно ни содержало, всегда одно переменное определяется через остальные и является их функцией; два различных уравнения, устанавливающие зависимость между одними и теми же переменными, определят два из них через остальные и т. д.

83. *Наибольшего внимания заслуживает деление функций двух и более переменных на однородные и неоднородные.*

Однородная функция [12]— это такая, в которой везде имеем одинаковое число измерений переменных; функция же неоднородная такая, в которой встречаются различные измерения. При этом считают, что каждое переменное составляет одно измерение, квадрат каждого, а также произведение двух дают два; произведение трех переменных, одинаковых или различных,—три и т. д.; постоянные же количества в счет числа измерений не принимаются. Так, считают, что выражения

$$\alpha y, \quad \beta z$$

имеют одно измерение;

$$\alpha y^2, \quad \beta yz, \quad \gamma z^2$$

имеют два измерения;

$$\alpha y^3, \quad \beta y^2 z, \quad \gamma yz^2, \quad \delta z^3$$

имеют три измерения;

$$\alpha y^4, \quad \beta y^3 z, \quad \gamma y^2 z^2, \quad \delta yz^3, \quad \varepsilon z^4$$

имеют четыре измерения и т. д.

84. Применим сначала это разделение к функциям целым и положим, что имеются только два переменных, так как рассуждение для многих такое же.

Итак, целая функция будет однородной, когда все ее отдельные члены имеют одно и то же число измерений.

Функции этого рода удобнее всего подразделяются по числу измерений их членов. Так,

$$\alpha y + \beta z$$

будет общий вид целых функций одного измерения; выражение же

$$\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2$$

будет общим видом функций двух измерений; затем общим видом функций трех измерений будет

$$\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma yz^2 + \delta z^3,$$

четырех измерений

$$\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta yz^3 + \varepsilon z^4$$

и т. д. По аналогии постоянное количество α будет функцией нулевого измерения.

85. *Дробная функция будет однородной, если ее числитель и знаменатель будут функциями однородными.*

Так, дробь

$$\frac{ayz+bz^2}{\alpha y+\beta z}$$

будет однородной функцией y и z; число же измерений найдется, если от числа измерений числителя отнять число измерений знаменателя; и в силу этого приведенная выше дробь будет функцией одного измерения. Дробь же

$$\frac{y^5+z^5}{y^2+z^2}$$

будет функцией трех измерений. Следовательно, когда в числителе и знаменателе имеется одинаковое число измерений, то дробь будет нулевого измерения, как это имеет место у дроби

$$\frac{y^3+z^3}{y^2z},$$

или же у дробей:

$$\frac{y}{z}, \quad \frac{\alpha z^2}{y^2}, \quad \frac{\beta y^3}{z^3}.$$

Если же в знаменателе будет больше измерений, чем в числителе, то число измерений дроби будет отрицательным. Так, дробь

$$\frac{y}{z^2}$$

будет функцией минус одного измерения;

$$\frac{y+z}{y^4+z^4}$$

будет функцией минус трех измерений;

$$\frac{1}{y^5+ayz^4}$$

будет функцией минус пяти измерений, так как в числителе нет никакого измерения. Очевидно, что несколько однородных функций одинакового числа измерений при сложении или вычитании дадут функцию также однородную и того же числа измерений. Так, выражение

$$\alpha y+\frac{\beta z^2}{y}+\frac{\gamma y^4-\delta z^4}{y^2z+yz^2}$$

будет функцией одного измерения, а выражение

$$\alpha+\frac{\beta y}{z}+\frac{\gamma z^2}{y^2}+\frac{y^2+z^2}{y^2-z^2}$$

будет функцией нулевого измерения.

86. Природа однородных функций может быть также присуща выражениям иррациональным. Если P будет какая-либо однородная функция n измерений, то $\sqrt{P}$ будет функцией $\frac{1}{2}n$ измерений; $\sqrt[3]{P}$ будет функцией $\frac{1}{3}n$ измерений, и вообще $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ будет функцией $\frac{\mu}{\nu}n$ измерений. Так, $\sqrt{y^2+z^2}$ будет функцией одного измерения; $\sqrt[3]{y^9+z^9}$ будет функ-

цией трех измерений; $(yz+z^2)^{\frac{3}{4}}$ будет функцией $\frac{3}{2}$ измерений, а $\frac{y^2+z^2}{\sqrt{y^4+z^4}}$ будет функцией нулевого измерения. Стало быть, в силу изложенного выше выражение

$$\frac{1}{y}+\frac{y\sqrt{y^2+z^2}}{z^3}-\frac{y}{\sqrt[3]{y^6-z^6}}+\frac{y\sqrt{z}}{z^2\sqrt{y}+\sqrt{y^5+z^5}}$$

будет однородной функцией минус одного измерения.

87. На основании сказанного легко понять, будет ли иррациональная неявная функция однородной, или нет. Пусть V будет такой неявной функцией, причем

$$V^3+PV^2+QV+R=0,$$

где P, Q и R являются функциями y и z. Прежде всего ясно, что V не может быть однородной функцией, если P, Q и R не будут функциями однородными. Если положим, что V есть функция n измерений, то V^2 будет функцией $2n$, а V^3 функцией $3n$ измерений; но так как везде должно быть одно и то же число измерений, то надо, чтобы P было функцией n измерений, Q функцией $2n$ измерений и R функцией $3n$ измерений. Если, обратно, буквы P, Q, R будут однородными функциями соответственно n, $2n$, $3n$ измерений, то отсюда выведем заключение, что V будет функцией n измерений. Так, если

$$V^5+(y^4+z^4)V^3+\alpha y^8V-z^{10}=0,$$

то V будет однородной функцией двух измерений от переменных y и z.

88. *Если V будет однородной функцией y и z n измерений и если положить в ней всюду $y=uz$, то функция V перейдет в произведение степени z^n на некоторую функцию переменного u.*

Путем подстановки $y=uz$ в отдельные члены будут введены такие же степени z, в каких раньше входило y. Но так как в отдельных членах число измерений переменных y и z вместе равнялось n, а теперь одно только переменное z будет иметь во всех членах n измерений, то всюду войдет его степень z^n. Следовательно, функция V будет делиться на эту степень, причем частное будет функцией одного только переменного u.

Это станет ясным прежде всего в применении к целым функциям; если

$$V=\alpha y^3+\beta y^2z+\gamma yz^2+\delta z^3,$$

то при $y=uz$ будет

$$V=z^3(\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta).$$

Затем то же обнаруживается у дробных функций; ведь если

$$V=\frac{\alpha y+\beta z}{y^2+z^2},$$

т. е. функция минус одного измерения, то при $y=uz$ будет

$$V=z^{-1}\cdot\frac{\alpha u+\beta}{u^2+1}.$$

Отсюда не исключаются и функции иррациональные; так, если

$$V=\frac{y+\sqrt{y^2+z^2}}{z\sqrt{y^3+z^3}},$$

что является функцией $-\frac{3}{2}$ измерений, при $y=uz$ получится

$$V=z^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{u+\sqrt{u^2+1}}{\sqrt{u^3+1}}.$$

Итак, этим путем однородные функции двух только переменных приводятся к функциям одного переменного; при этом степень z, будучи множителем, не оказывает влияния на функцию u.

89. *Однородная функция V двух переменных y и z нулевого измерения при $y=uz$ преобразуется в функцию одного-единственного переменного u.*

Так как число измерений есть нуль, то степень z, на которую помножится функция u, будет $z^0=1$; в этом случае переменное z вовсе выйдет из расчета. Так, если

$$V=\frac{y+z}{y-z},$$

то при $y=uz$ получится

$$V=\frac{u+1}{u-1};$$

также и у иррациональных функций, например, если $V=\frac{y-\sqrt{y^2-z^2}}{z}$, то при $y=uz$ будет

$$V=u-\sqrt{u^2-1}.$$

90. *Целая однородная функция двух переменных y и z может быть разложена на столько простых множителей вида $\alpha y+\beta z$, сколько у нее измерений.*

Так как функция однородна, то при $y=uz$ она перейдет в произведение z^n на некоторую целую функцию u; последняя же может быть разложена на простые множители вида $\alpha u+\beta$. Если помножить в отдельности каждый такой множитель на z, то вид его будет $\alpha uz+\beta z=\alpha y+\beta z$, так как $uz=y$. При наличии множителя z^n получится столько множителей этого рода, сколько единиц содержит показатель n; эти простые множители будут либо действительными, либо мнимыми; это значит, что коэффициенты α и β будут либо действительными, либо мнимыми.

Итак, отсюда вытекает, что функция двух измерений

$$ay^2+byz+cz^2$$

будет иметь два простых множителя вида $\alpha y+\beta z$; функция же

$$ay^3+by^2z+cyz^2+dz^3$$

будет иметь три простых множителя вида $\alpha y+\beta z$; таким же образом обстоит дело с целыми однородными функциями большего числа измерений.

91. Как выражение $\alpha y+\beta z$ представляет общий вид целых функций одного измерения, так

$$(\alpha y+\beta z)(\gamma y+\delta z)$$

будет общей формой целых функций двух измерений; так же в форме

$$(\alpha y+\beta z)(\gamma y+\delta z)(\varepsilon y+\zeta z)$$

будут заключаться все целые функции трех измерений и таким же образом все однородные целые функции могут быть выражены через произведение стольких множителей вида $\alpha y+\beta z$, сколько эти функции содержат измерений. Эти множители находятся путем решения уравнений точно таким же образом, как выше было показано нахождение простых множителей целых функций одного переменного. Впрочем, это свойство однородных функций двух переменных не распространяется на однородные функции трех и более переменных, уже общая форма такой функции двух только измерений

$$ay^2+byz+cyx+dxz+ex^2+fz^2,$$

вообще говоря, не может быть приведена к произведению

$$(\alpha y+\beta z+\gamma x)(\delta y+\varepsilon z+\zeta x),$$

а функции с большим числом измерений и того менее могут быть преобразованы в произведения такого рода.

92. Из сказанного об однородных функциях понятно также, что́ представляет собой функция неоднородная; именно, это такая функция, в членах которой не везде встречается одно и то же число измерений. Однако и неоднородные функции могут быть подразделены согласно числу встречающихся в них измерений. Так, функция будет *двоякого* измерения, если в ней встречается двоякое число измерений, и, следовательно, она представляет совокупность двух однородных функций, у которых числа измерений различны; так,

$$y^5+2y^3z^2+y^2+z^2$$

будет функцией двоякого измерения, так как она частично пяти, частично двух измерений. Функция же *троякого* измерения это такая, в которой налицо три различных числа измерений или которая может быть разбита на три однородных функции, как

$$y^6+y^2z^2+z^4+y-z.$$

Кроме того, существуют неоднородные функции дробные и иррациональные, которые перемешаны таким образом, что не могут быть разбиты на однородные функции; такого рода будут

$$\frac{y^3+ayz}{by+z^2}, \quad \frac{a+\sqrt{y^2+z^2}}{y^2-bz}.$$

93. Иногда неоднородная функция путем удобной подстановки, примененной или к одному, или к обоим переменным может быть приведена к однородной; в каких случаях это возможно, указать не так легко. Достаточно будет привести некоторые примеры, в которых имеет место приведение такого рода. Пусть дана функция

$$y^5+z^2y+y^3z+\frac{z^3}{y};$$

при небольшом внимании обнаружится, что она приведется к однородной, если положить $z=x^2$; именно, получится

$$y^5+x^4y+y^3x^2+\frac{x^6}{y},$$

т. е. однородная функция x и y пяти измерений. Далее, функция

$$y+y^2x+y^3x^2+y^5x^4+\frac{a}{x}$$

приводится к однородной при $x=\frac{1}{z}$; именно, получается функция одного измерения

$$y+\frac{y^2}{z}+\frac{y^3}{z^2}+\frac{y^5}{z^4}+az.$$

Бывают случаи гораздо более трудные, в которых нельзя прийти к однородному виду путем такой простой подстановки.

94. Наконец, особо заслуживает быть отмеченным довольно употребительное деление целых функций по порядкам, согласно которому порядок определяется наибольшим имеющимся в функции числом измерений. Так,

$$x^2+y^2+z^2+ay-a^2$$

есть функция второго порядка, так как встречаются два измерения, а

$$y^4+yz^3-ay^2z+abyz-a^2y^2+b^4$$

относится к функциям четвертого порядка. К этому делению обычно прибегают в учении о кривых линиях; из этого учения возникло еще одно деление целых функций, достойное упоминания.

95. Именно, остается еще деление целых функций на *составные* и *несоставные*[1]). Составной функцией будет та, которая может быть разложена на рациональные множители или которая представляет произведение двух или более рациональных функций; такого рода будет

$$y^4-z^4+2az^3-2byz^2-a^2z^2+2abzy-b^2y^2$$

являющееся произведением двух функций:

$$(y^2+z^2-az+by)(y^2-z^2+az-by).$$

Мы видели, что всякая целая однородная функция, содержащая только два переменных, есть функция составная, так как она заключает столько простых множителей вида $\alpha y+\beta z$, сколько имеет измерений. Целая функция будет несоставной, если ее вовсе нельзя разложить на рациональные множители; так,

$$y^2+z^2-a^2,$$

как легко видеть, не будет иметь никаких рациональных множителей. При исследовании делителей выяснится, будет ли предложенная функция составной или несоставной.

[1]) Complexas atque incomplexas.—Следуя современной терминологии, мы бы сказали: приводимые и неприводимые. [*И. П.*]

ГЛАВА VI

О ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ КОЛИЧЕСТВАХ

96. Хотя исследование трансцендентных функций относится к интегральному исчислению, однако, прежде чем переходить к нему, следует рассмотреть некоторые наиболее часто встречающиеся виды, открывающие доступ ко многим исследованиям. Прежде всего надлежит рассмотреть количества показательные, или степени, показатель которых сам есть количество переменное. Ясно, что такого рода количества нельзя отнести к алгебраическим функциям, так как в последних имеют место только постоянные показатели. Показательные количества разнообразны, смотря по тому, будет ли переменным количеством один только показатель или, кроме того, еще и само возвышаемое количество; к первому роду относится a^z, ко второму y^z; даже и сам показатель может быть показательным количеством, как в выражениях a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}. Мы не будем останавливаться на дальнейшем подразделении этих количеств, так как природа их может быть понята достаточно ясно, если мы разберем только первый вид a^z.

97. Итак, пусть дано показательное количество a^z, представляющее степень постоянного количества a с переменным показателем z. Так как показатель z заключает в себе все определенные числа, то прежде всего ясно, что при подстановке вместо z последовательно всех целых положительных чисел получатся такие определенные значения:

$$a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6 \text{ и т. д.}$$

Если же подставлять вместо z последовательно отрицательные числа -1, -2, -3, -4 и т. д., то получим

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^4} \text{ и т. д.};$$

если $z=0$, то $a^0=1$. При подстановке вместо z чисел дробных, как $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ и т. д., получатся значения

$$\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt{a^2},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[4]{a^3} \text{ и т. д.};$$

будучи рассматриваемы сами по себе, они дают два или много значений, так как извлечение корней всегда приводит к многозначности.

Однако обычно принимаются во внимание только значения первоначальные, т. е. действительные и положительные, вследствие чего количество a^z рассматривается как однозначная функция z. Так, $a^{\frac{5}{2}}$ займет некоторое среднее место между a^2 и a^3 и будет, следовательно, количеством такого же рода; и хотя значением $a^{\frac{5}{2}}$ будет в одинаковой мере и $-a^2\sqrt{a}$ и $+a^2\sqrt{a}$, однако, в действительности принимается в расчет только последнее значение. Так же обстоит дело, когда показатель z принимает иррациональные значения; в этих случаях рассматривается только одно действительное значение, так как трудно представить себе число заключенных в этом символе значений. Так, $a^{\sqrt{7}}$ будет определенным значением, заключенным между пределами a^2 и a^3.

98. Значения показательного количества a^z в весьма сильной степени будут зависеть от величины постоянного числа a. Если будет $a=1$, то всегда $a^z=1$, какие бы значения ни придавать показателю z; если $a>1$, то значение a^z будет тем больше, чем большее число будет подставлено вместо z, и при $z=\infty$ возрастет до бесконечности; когда $z=0$, то $a^z=1$, а при $z<0$ значения a^z станут меньше единицы до тех пор, пока при $z=-\infty$ не будет $a^z=0$. Обратное получится, когда $a<1$, оставаясь все же количеством положительным; тогда при возрастании z от нуля значения a^z убывают; если же подставлять вместо z отрицательные числа, то эти значения будут возрастать. Когда $a<1$, то $\frac{1}{a}>1$; при $\frac{1}{a}=b$ будет $a^z=b^{-z}$; следовательно, последний случай может быть выведен из предыдущего.

99. Если будет $a=0$, то в значениях a^z происходит огромный скачок. А именно, коль скоро z будет числом положительным, т. е. больше нуля, всегда будет $a^z=0$; если $z=0$, то $a^0=1$; если же z будет числом отрицательным, то a^z примет бесконечно большое значение. Так, например, пусть $z=-3$; тогда

$$a^z=0^{-3}=\frac{1}{0^3}=\frac{1}{0},$$

т. е. бесконечность.

Еще гораздо бо́льшие скачки встречаются, когда постоянное a имеет отрицательное значение, например -2; тогда, при подстановке вместо z целых чисел, значения a^z будут попеременно положительными и отрицательными, как это видно из ряда

$$a^{-4},\ a^{-3},\ a^{-2},\ a^{-1},\ a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ a^4 \text{ и т. д.},$$

$$+\frac{1}{16},\ -\frac{1}{8},\ +\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -2,\ +4,\ -8,\ +16 \text{ и т. д.}$$

Кроме того, если показателю z давать дробные значения, то степень $a^z=(-2)^z$ принимает то действительные, то мнимые значения; так, $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$ будет мнимым; $a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}$ действительным; когда же показателю z даются иррациональные значения, то будет ли степень a^z давать действительные или мнимые количества, нельзя даже определить.

100. В силу указанных неудобств при подстановке вместо a отрицательных чисел будем считать a числом положительным, и притом бо́льшим, чем единица, так как к этому легко приводятся также те случаи, когда a есть число положительное, меньшее единицы. Если положить $a^z = y$, то при подстановке вместо z всех действительных чисел, заключающихся между пределами $+\infty$ и $-\infty$, y примет все положительные значения между $+\infty$ и 0. Если $z=\infty$, то $y=\infty$; когда $z=0$, то $y=1$, и при $z=-\infty$ будет $y=0$. Следовательно, и обратно, какое бы положительное значение ни принять для y, для z получится соответственное действительное значение, так что будет $a^z=y$, если же придать y отрицательное значение, то показатель z не может иметь действительного значения.

101. Итак, если $y=a^z$, то y будет некоторой функцией z; каким образом y будет зависеть от z, это легко понять из природы степеней: какое бы значение ни дать z, этим определяется значение переменного y. Но

$$y^2=a^{2z},\quad y^3=a^{3z},$$

и вообще будет

$$y^n=a^{nz};$$

отсюда следует, что

$$\sqrt{y}=a^{\frac{1}{2}z},\quad \sqrt[3]{y}=a^{\frac{1}{3}z}\ \text{и}\ \frac{1}{y}=a^{-z},\quad \frac{1}{y^2}=a^{-2z}\ \text{и}\ \frac{1}{\sqrt{y}}=a^{-\frac{1}{2}z}$$

и т. д. Кроме того, если $v=a^x$, то

$$vy=a^{x+z}\ \text{и}\ \frac{v}{y}=a^{x-z};$$

с помощью этого облегчается нахождение значения y по данному значению переменного z.

ПРИМЕР

Если $a=10$, то с помощью десятичной арифметики, которой мы пользуемся, мы сразу получаем значение y, если вместо z подставлять целые числа. Именно,

$$10^1=10,\ 10^2=100,\ 10^3=1000,\ 10^4=10\,000\ \text{и}\ 10^0=1;$$

далее

$$10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1,\quad 10^{-2}=\frac{1}{100}=0{,}01,\quad 10^{-3}=\frac{1}{1000}=0{,}001;$$

если же вместо z подставлять дроби, то значения y могут быть указаны путем извлечения корней; так,

$$10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3{,}162277$$

и т. д. [13].

102. Как по любому значению z может быть найдено значение y, соответствующее данному числу a, так, и обратно, можно найти значение переменного z, соответствующее любому заданному положительному

значению переменного y так, чтобы $a^z=y$. Это значение переменного z, поскольку z рассматривается как функция y, обычно называется *логарифмом* переменного y. Итак, учение о логарифмах предполагает, что вместо a подставлено определенное постоянное число, которое поэтому носит название *основания* логарифмов; когда оно принято, то логарифмом любого числа y будет показатель степени a^z такой, что сама степень a^z будет равна числу y; логарифм числа y обычно обозначается через ly. Итак, если

$$a^z=y, \quad \text{то } z=ly;$$

отсюда понятно, что хотя основание логарифмов и зависит от нашего выбора, однако оно должно быть числом, бо́льшим, чем единица; отсюда можно получить в виде действительных чисел только логарифмы положительных чисел.

103. Какое бы число ни принять за основание a логарифмов, всегда будет $l1=0$: если в уравнении $a^z=y$, которое равносильно $z=ly$, положить $y=1$, то будет $z=0$.

Далее, логарифмы чисел, бо́льших, чем единица, будут положительны и будут зависеть от значения основания; так

$$la=1,\ la^2=2,\ la^3=3,\ la^4=4 \text{ и т. д.};$$

отсюда a posteriori легко понять, какое число принято за основание: именно, то число будет основанием, логарифм которого равен единице. Логарифмы чисел, меньших, чем единица, однако положительных, будут отрицательны; так

$$l\frac{1}{a}=-1, \quad l\frac{1}{a^2}=-2, \quad l\frac{1}{a^3}=-3 \text{ и т. д.},$$

логарифмы же чисел отрицательных не будут действительными, но, как мы уже заметили, будут мнимыми.

104. Подобным образом, если $ly=z$, то будет

$$ly^2=2z, \quad ly^3=3z,$$

и вообще

$$ly^n=nz, \quad \text{или} \quad ly^n=nly,$$

так как $z=ly$. Итак, логарифм любой степени y равен логарифму y, помноженному на показатель степени; так,

$$l\sqrt{y}=\frac{1}{2}z=\frac{1}{2}ly, \quad l\frac{1}{\sqrt{y}}=ly^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}ly \text{ и т. д.};$$

отсюда по данному логарифму любого числа могут быть найдены логарифмы каких угодно его степеней. Если найдены два логарифма, например

$$ly=z \quad \text{и} \quad lv=x,$$

то, так как $y=a^z$ и $v=a^x$, будем иметь

$$lvy=x+z=lv+ly;$$

отсюда логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов сомножителей; подобным же образом будет

$$l\frac{y}{v}=z-x=ly-lv,$$

т. е. логарифм дроби равен логарифму числителя минус логарифм знаменателя; правила эти служат для нахождения логарифмов многих чисел по известным уже нескольким логарифмам.

105. Из сказанного ясно, что рациональные логарифмы могут быть только у степеней основания a; если другое число b не будет степенью основания a, то его логарифм не может быть выражен рациональным числом. Логарифм не будет даже числом иррациональным; если бы было $lb=\sqrt{n}$, то тогда $a^{\sqrt{n}}=b$, чего не может быть, если a и b — рациональные числа [14]. Обычно ищут логарифмы чисел прежде всего рациональных и целых, так как по ним могут быть найдены логарифмы дробей и иррациональных чисел[1]). Так как логарифмы чисел, не являющихся степенями основания a, не могут быть выражены ни рационально, ни иррационально, то они справедливо относятся к количествам трансцендентным; поэтому логарифмы обычно причисляются к количествам трансцендентным.

106. Вследствие этого логарифмы чисел лишь приближенно выражаются десятичными дробями, каковые, однако, тем меньше уклоняются от истины, чем до большего числа знаков они вычислены. Этим путем можно весьма близко к действительности определить логарифм любого числа только посредством извлечения квадратного корня. Так, при

$$ly=z$$

и

$$lv=x$$

будет

$$l\sqrt{vy}=\frac{x+z}{2};$$

если данное число b заключается между границами a^2 и a^3, логарифмы коих будут 2 и 3, то найдем значение $a^{2\frac{1}{2}}$ или $a^2\sqrt{a}$; при этом b будет заключаться между границами a^2 и $a^{2\frac{1}{2}}$ или между $a^{2\frac{1}{2}}$ и a^3; какой бы из этих случаев ни имел место, мы, взяв среднее пропорциональное, получим более близкие границы, и, таким образом, можно будет дойти до таких границ, промежуток между которыми будет меньше заданного числа и с которыми данное число b может быть отождествлено без ошибки. Но так как логарифмы каждой из этих границ известны, то, наконец, найдется логарифм числа b.

ПРИМЕР

Примем за основание логарифмов $a=10$, как это обычно бывает в таблицах, вошедших в употребление; требуется найти только приближенное значение для логарифма числа 5. Так как 5 заключается между границами 1 и 10, логарифмы которых суть 0 и 1, то установим

---

1) У Эйлера здесь использован вместо обычного для него термина numerus irrationalis несколько архаичный и для XVIII века термин античной и средневековой математики numerus surdus («глухое число»). [*И. П.*]

непрерывное извлечение корней следующим образом, пока не придем к границам, не отличимым уже от предложенного числа 5:

$A=1,000\,000$	$lA=0,000\,0000$	пусть
$B=10,000\,000$	$lB=1,000\,0000$	$C=\sqrt{AB}$
$C=3,162\,277$	$lC=0,500\,0000$	$D=\sqrt{BC}$
$D=5,623\,413$	$lD=0,750\,0000$	$E=\sqrt{CD}$
$E=4,216\,964$	$lE=0,625\,0000$	$F=\sqrt{DE}$
$F=4,869\,674$	$lF=0,687\,5000$	$G=\sqrt{DF}$
$G=5,232\,991$	$lG=0,718\,7500$	$H=\sqrt{FG}$
$H=5,048\,065$	$lH=0,703\,1250$	$I=\sqrt{FH}$
$I=4,958\,069$	$lI=0,695\,3125$	$K=\sqrt{HI}$
$K=5,002\,865$	$lK=0,699\,2187$	$L=\sqrt{IK}$
$L=4,980\,416$	$lL=0,697\,2656$	$M=\sqrt{KL}$
$M=4,991\,627$	$lM=0,698\,2421$	$N=\sqrt{KM}$
$N=4,997\,242$	$lN=0,698\,7304$	$O=\sqrt{KN}$
$O=5,000\,052$	$lO=0,698\,9745$	$P=\sqrt{NO}$
$P=4,998\,647$	$lP=0,698\,8525$	$Q=\sqrt{OP}$
$Q=4,999\,350$	$lQ=0,698\,9135$	$R=\sqrt{OQ}$
$R=4,999\,701$	$lR=0,698\,9440$	$S=\sqrt{OR}$
$S=4,999\,876$	$lS=0,698\,9592$	$T=\sqrt{OS}$
$T=4,999\,963$	$lT=0,698\,9668$	$V=\sqrt{OT}$
$V=5,000\,008$	$lV=0,698\,9707$	$W=\sqrt{TV}$
$W=4,999\,984$	$lW=0,698\,9687$	$X=\sqrt{VW}$
$X=4,999\,997$	$lX=0,698\,9697$	$Y=\sqrt{VX}$
$Y=5,000\,003$	$lY=0,698\,9702$	$Z=\sqrt{XY}$
$Z=5,000\,000$	$lZ=0,698\,9700$ [15]	

Итак, беря средние пропорциональные, мы, наконец, пришли к $Z=5,000\,000$, откуда искомый логарифм числа 5 будет $0,698\,9700$ при основании логарифмов, равном 10. Поэтому приближенно будет

$$10^{\frac{69897}{100000}}=5.$$

Этим способом были вычислены Бриггом и Влакком [16] обычные таблицы логарифмов, хотя впоследствии были открыты превосходные средства, с помощью которых логарифмы могут быть вычислены гораздо быстрее.

107. Существует столько различных систем логарифмов, сколько различных чисел можно принять за основание a; поэтому число систем логарифмов бесконечно. Однако всегда логарифмы одного и того же числа в двух системах сохраняют одно и то же отношение между собою. Если основание одной системы равно a, а другой равно b, причем логарифм числа n в первой системе равен p, а во второй равен q, то

$$a^p=n \text{ и } b^q=n,$$

откуда

$$a^p = b^q$$

и, следовательно,

$$a = b^{\frac{q}{p}}.$$

Дробь $\frac{q}{p}$ должна, следовательно, иметь постоянное значение, какое бы ни взять число n. Так что если вычислены логарифмы всех чисел в одной системе, то отсюда легко найти логарифмы какой-либо другой системы при помощи «золотого» [1]) правила. Так, если даны логарифмы при основании 10, то отсюда могут быть найдены логарифмы при любом другом основании, например 2; в самом деле, пусть требуется найти логарифм числа n при основании 2, и пусть он равен q, тогда как логарифм того же числа n при основании 10 пусть равен p. Так как при основании 10 будет $l2 = 0{,}3010300$, а при основании 2 будет $l2 = 1$, то

$$0{,}3010300 : 1 = p : q$$

и, следовательно,

$$q = \frac{p}{0{,}3010300} = 3{,}3219280 \cdot p;$$

если все обычные логарифмы помножить на число $3{,}3219280$, то получится таблица логарифмов при основании 2.

108. *Отсюда следует, что логарифмы двух чисел в любой системе сохраняют одно и то же отношение.*

Пусть даны два числа M и N, логарифмы которых при основании a суть m и n; тогда $M = a^m$ и $N = a^n$; отсюда $a^{mn} = M^n = N^m$ и, значит, $M = N^{\frac{m}{n}}$; так как в это уравнение не входит основание a, то ясно, что дробь $\frac{m}{n}$ будет иметь значение, не зависящее от a. Пусть теперь логарифмы тех же чисел M и N при другом основании b будут μ и ν; подобным образом получится

$$M = N^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Следовательно, будет

$$N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}},$$

откуда

$$\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}, \quad \text{или} \quad m : n = \mu : \nu.$$

Так, мы видели выше, что логарифмы различных степеней одного и того же числа, как y^m и y^n, в каждой системе логарифмов сохраняют отношение показателей $m : n$.

109. Для составления таблиц логарифмов при любом основании a достаточно вычислить логарифмы только простых чисел способом, указанным выше, или другим, более удобным. Так как логарифмы составных чисел равны суммам логарифмов отдельных сомножителей, то логарифмы составных чисел найдутся при помощи только лишь

[1]) То есть тройного. [*С. Л.*]

сложения. Так, если имеются логарифмы чисел 3 и 5, то

$$l15 = l3 + l5, \quad l45 = 2l3 + l5.$$

Но, так как выше был найден

$$l5 = 0{,}698\,9700$$

при основании $a = 10$ и, кроме того, $l10 = 1$, то

$$l\,\frac{10}{5} = l2 = l10 - l5;$$

отсюда получается

$$l2 = 1 - 0{,}698\,9700 = 0{,}301\,0300;$$

из этих логарифмов простых чисел 2 и 5 найдутся логарифмы всех чисел, составленных из 2 и 5; таковы будут 4, 8, 16, 32, 64 и т. д.; 20, 40, 80, 25, 50 и т. д.

110. Применение логарифмических таблиц для сокращения числовых выкладок весьма обширно, так как по таблицам этого рода можно найти не только логарифм любого данного числа, но также число, соответствующее любому данному логарифму. Так, если c, d, e, f, g, h означают какие-либо числа, то значение выражения

$$\frac{c^2 d \sqrt{e}}{f \sqrt[3]{gh}}$$

может быть найдено без умножения; логарифм этого выражения будет равен

$$2lc + ld + \frac{1}{2}\,le - lf - \frac{1}{3}\,lg - \frac{1}{3}\,lh;$$

если найти число, соответствующее этому логарифму, то получится искомое значение. Но особенно полезны таблицы логарифмов при нахождении самых сложных степеней и корней; вместо этих операций в логарифмах применяются только умножение и деление.

ПРИМЕР 1

Требуется найти значение степени $2^{\frac{7}{12}}$.

Так как логарифм ее равен $\frac{7}{12}\,l2$, то, помножив логарифм двух, который по таблицам есть 0,301 0300, на $\frac{7}{12}$, т. е. на $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$, найдем

$$l2^{\frac{7}{12}} = 0{,}175\,6008;$$

этому логарифму соответствует число 1,498 307, которое и выражает приближенно значение $2^{\frac{7}{12}}$.

ПРИМЕР 2

Число жителей некоторой области увеличивается ежегодно на $\frac{1}{30}$ свою часть, а вначале область населяли 100 000 человек; спрашивается: каково будет число жителей через 100 лет?

Пусть, ради краткости, число жителей вначале было n, так что

$$n = 100\,000;$$

по истечении одного года число жителей будет равно

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)n=\frac{31}{30}n;$$

через 2 года оно будет равно $\left(\frac{31}{30}\right)^2 n$; через три года оно будет равно $\left(\frac{31}{30}\right)^3 n$; отсюда через сто лет оно будет равно

$$\left(\frac{31}{30}\right)^{100} n=\left(\frac{31}{30}\right)^{100} 100\,000.$$

Логарифм этого числа равен

$$100l\,\frac{31}{30}+l\,100\,000,$$

но

$$l\,\frac{31}{30}=l31-l30=0{,}014\,240\,439,$$

откуда

$$100l\,\frac{31}{30}=1{,}424\,0439;$$

если придать сюда $l100\,000=5$, то логарифм искомого числа жителей получится равным

$$6{,}424\,0439;$$

ему соответствует число, равное

$$2\,654\,874.$$

Итак, через 100 лет число населения увеличится более чем в $26\frac{1}{2}$ раз.

ПРИМЕР 3

После потопа род человеческий размножился от шести человек; положим, что 200 лет спустя число людей возросло до 1 000 000; требуется узнать, на какую свою часть число людей должно было увеличиваться ежегодно.

Пусть за это время число людей возрастало ежегодно на $\frac{1}{x}$ свою часть; через 200 лет число людей должно было стать равным

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} 6=1\,000\,000;$$

отсюда

$$\frac{1+x}{x}=\left(\frac{1\,000\,000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}.$$

Поэтому

$$l\,\frac{1+x}{x}=\frac{1}{200}\,l\,\frac{1\,000\,000}{6}=\frac{1}{200}\cdot 5{,}221\,8487=0{,}026\,1092,$$

вследствие чего

$$\frac{1+x}{x}=\frac{1\,061\,963}{1\,000\,000}$$

и

$$1\,000\,000=61\,963x,$$

откуда

$$x = \text{приблизительно } 16.$$

Итак, для такого размножения людей достаточно было ежегодного увеличения на $\frac{1}{16}$ часть; такое размножение не может считаться слишком большим ввиду того, что жизнь тогда была очень долголетней. Если бы увеличение числа людей продолжало идти далее в таком же отношении в течение промежутка в 400 лет, то тогда число людей должно было бы дойти до

$$1\,000\,000 \cdot \frac{1\,000\,000}{6} = 166\,666\,666\,666;$$

для прокормления такого числа не хватило бы всей земли [17].

ПРИМЕР 4

Пусть к концу каждого века число людей удваивается; требуется найти годовой прирост.

Если положим, что число людей возрастает ежегодно на $\frac{1}{x}$ свою часть, и притом вначале число людей было равно n, то по истечении 100 лет это число будет равно $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} \cdot n$; это должно быть равно $2n$ и тогда

$$\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$$

и

$$l\,\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100}\,l2 = 0{,}003\,0103;$$

отсюда

$$\frac{1+x}{x} = \frac{10\,069\,555}{10\,000\,000};$$

поэтому

$$x = \frac{10\,000\,000}{69\,555} = \text{приблизительно } 144.$$

Итак, достаточно ежегодного прироста числа людей на $\frac{1}{144}$ часть.

111. Но наиболее полезно применение логарифмов при решении таких уравнений, в которых неизвестное количество входит в показателе степени. Так, если получено уравнение вида

$$a^x = b,$$

из которого нужно найти значение неизвестного x, то это можно сделать только при помощи логарифмов. Действительно, если $a^x = b$, то

$$la^x = xla = lb,$$

следовательно,

$$x = \frac{lb}{la};$$

при этом, конечно, безразлично, какой системой логарифмов пользоваться, потому что в любой системе логарифмы чисел a и b сохраняют между собой постоянное отношение.

ПРИМЕР 1

Пусть число людей увеличивается ежегодно на $\frac{1}{100}$ свою часть; спрашивается, через сколько лет число людей удесятерится.

Положим, что это наступит через x лет, причем число людей вначале было равно n; стало быть, по истечении x лет оно будет равно $\left(\frac{101}{100}\right)^x n$, а так как оно должно равняться $10n$, то

$$\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10;$$

поэтому

$$xl\frac{101}{100} = l10$$

и

$$x = \frac{l10}{l101 - l100}.$$

Таким образом, получится

$$x = \frac{10\,000\,000}{43\,214} = 231 \text{ приблизительно.}$$

Итак, через 231 год число людей, если ежегодное приращение составляет только $\frac{1}{100}$ часть, станет больше в 10 раз; отсюда через 462 года оно станет в 100 раз, а через 693 года в 1000 раз больше.

ПРИМЕР 2

Некто должен 400 000 флоринов на том условии, что ежегодно он обязан уплачивать по 5 процентов со 100; платил же он каждый год по 25 000 флоринов. Спрашивается, через сколько лет долг будет погашен полностью. Обозначим через a сумму долга 400 000 флоринов и через b сумму 25 000 флоринов ежегодной уплаты. По истечении одного года долг составит

$$\frac{105}{100}a - b;$$

по истечении двух лет

$$\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \frac{105}{100}b - b;$$

по истечении трех лет

$$\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \frac{105}{100}b - b;$$

отсюда, обозначив для краткости $\frac{105}{100}$ через n, по истечении x лет найдем долг равным

$$n^x a - n^{x-1}b - n^{x-2}b - n^{x-3}b - \ldots - b = n^x a - b\left(1 + n + n^2 + \ldots + n^{x-1}\right).$$

Так как по природе геометрических прогрессий

$$1 + n + n^2 + \ldots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1},$$

то спустя x лет должник будет должен

$$n^x a - \frac{n^x b - b}{n - 1}$$

флоринов; полагая этот долг равным нулю, получаем уравнение

$$n^x a = \frac{n^x b - b}{n-1}$$

или

$$(n-1)\, n^x a = n^x b - b;$$

следовательно,

$$(b - na + a)\, n^x = b$$

и

$$n^x = \frac{b}{b-(n-1)\,a};$$

отсюда

$$x = \frac{lb - l\,[b-(n-1)\,a]}{ln}.$$

Так как

$$a = 400\,000, \quad b = 25\,000, \quad n = \frac{105}{100},$$

то

$$(n-1)\,a = 20\,000$$

и

$$b-(n-1)\,a = 5000.$$

Для числа лет, по истечении которых долг будет погашен полностью, получится значение

$$x = \frac{l25\,000 - l5000}{l\frac{105}{100}} = \frac{l5}{l\frac{21}{20}} = \frac{6\,989\,700}{211\,893}.$$

Итак, x будет несколько меньше 33 лет; это значит, что по истечении 33 лет долг не только будет погашен, но кредитор должен будет еще вернуть должнику

$$\frac{(n^{33}-1)\,b}{n-1} - n^{33}a = \frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{33}\cdot 5000 - 25\,000}{\frac{1}{20}} = 100\,000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} - 500\,000 \quad \text{флоринов.}$$

Так как

$$l\frac{21}{20} = 0{,}021\,189\,2991,$$

то

$$l\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 0{,}699\,246\,87 \quad \text{и} \quad l\,100\,000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5{,}699\,2469,$$

чему соответствует число 500 318,8; поэтому кредитор по истечении 33 лет должен будет вернуть должнику $318\frac{4}{5}$ флоринов [18].

112. Обыкновенные логарифмы, вычисленные при основании 10, кроме того применения, которое имеют логарифмы вообще, представляют в общеупотребительной десятичной арифметике исключительное удобство и вследствие этого приносят, по сравнению с другими системами, бо́льшую пользу. В самом деле, так как логарифмы всех чисел, за исключением

степеней 10, выражаются десятичными дробями, то логарифмы чисел от 1 до 10 будут заключаться между пределами 0 и 1; логарифмы чисел от 10 до 100—между 1 и 2, и так далее. Всякий логарифм состоит поэтому из целого числа и десятичной дроби; это целое число обычно называют *характеристикой*, десятичную же дробь — *мантиссой* [19]. Характеристика на единицу меньше числа цифр, из которых состоит число; так, характеристика логарифма числа 78 509 будет 4, потому что оно состоит из пяти цифр или знаков. Отсюда по логарифму любого числа сразу видно, из скольких знаков состоит число. Так, число, соответствующее логарифму 7,580 4631, будет состоять из 8 знаков.

113. Когда мантиссы двух логарифмов совпадают, а различны только характеристики, то числа, соответствующие этим логарифмам, будут находиться в отношении степени десяти к единице и, таким образом, будут состоять из одинаковых цифр. Так, числа, имеющие логарифмами 4,913 0187 и 6,913 0187, будут 81 850 и 8 185 000; логарифму же 3,913 0187 соответствует 8185, а логарифму 0,913 0187 — число 8,185. Итак, одна только мантисса укажет цифры, составляющие число; когда они найдены, то из характеристики будет видно, сколько цифр слева надо отнести к целому; остальные направо дадут десятичную дробь. Так, если найденный логарифм будет 2,760 3429, то мантисса укажет цифры 5 758 945, а характеристика 2 определит число, соответствующее этому логарифму, так что получится 575,8945; если бы характеристика была 0, то получилось бы число 5,758 945; если бы она была на единицу меньше, так что была бы —1, то соответствующее число было бы в десять раз меньше, именно, 0,575 8945; характеристика же —2 будет соответствовать 0,057 58945 и т. д. Вместо таких отрицательных характеристик —1, —2, —3 и т. д. обычно пишутся 9, 8, 7 и т. д., причем подразумевается, что эти логарифмы нужно уменьшить на 10. Все это обычно излагается более подробно в наставлениях к логарифмическим таблицам.

ПРИМЕР

Ряд 2, 4, 16, 256 и т. д., каждый член которого есть квадрат предыдущего, продолжен до двадцать пятого члена; требуется найти величину этого последнего. Члены этого ряда выражаются более удобно при помощи показателей:

$$2^1, \quad 2^2, \quad 2^4, \quad 2^8 \text{ и т. д.};$$

отсюда видно, что показатели составляют геометрическую прогрессию, причем показатель двадцать пятого члена будет

$$2^{24} = 16\,777\,216,$$

так что сам искомый член будет равен

$$2^{16\,777\,216};$$

следовательно, логарифм его равен

$$16\,777\,216 \cdot l2.$$

Но так как

$$l2 = 0{,}301\,029\,995\,663\,981\,1952 \text{ [20]},$$

ГЛАВА VII

О ВЫРАЖЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ КОЛИЧЕСТВ ПРИ ПОМОЩИ РЯДОВ

114 [21]. Так как $a^0 = 1$, и при возрастании показателя числа a одновременно увеличивается значение степени, если только a есть число, большее единицы, то отсюда следует, что когда показатель бесконечно мало превышает нуль, то сама степень также бесконечно мало превзойдет единицу. Если ω будет числом бесконечно малым, т. е. столь малой дробью, что она только-только не равна нулю [22], то

$$a^{\omega} = 1 + \psi,$$

причем ψ также будет бесконечно малым числом. Из предыдущей главы ясно, что если ψ не будет числом бесконечно малым, то и ω не может быть таким. Значит, будет либо $\psi = \omega$, либо $\psi > \omega$, либо $\psi < \omega$; это соотношение будет зависеть от количества a. Так как a нам пока еще не известно, то положим $\psi = k\omega$; тогда

$$a^{\omega} = 1 + k\omega,$$

и если за основание логарифмов взять a, то будет

$$\omega = l\,(1 + k\omega).$$

ПРИМЕР

Чтобы стало яснее, каким образом число k зависит от основания a, положим $a = 10$ и найдем по обычным таблицам логарифм числа, как можно меньше превосходящего единицу, скажем, $1 + \frac{1}{1\,000\,000}$, так что $k\omega = \frac{1}{1\,000\,000}$; тогда

$$l\left(1 + \frac{1}{1\,000\,000}\right) = l\,\frac{1\,000\,001}{1\,000\,000} = 0{,}000\,000\,434\,29 = \omega.$$

Отсюда, так как $k\omega = 0{,}000\,001\,000\,00$, то

$$\frac{1}{k} = \frac{43\,429}{100\,000}$$

и

$$k = \frac{100\,000}{43\,429} = 2{,}302\,58;$$

отсюда видно, что k будет числом конечным, зависящим от величины основания a. Очевидно, если за основание a принять другое число, то логарифм того же числа $1+k\omega$ будет находиться к предыдущему в данном отношении; отсюда вместе с тем получится другое значение буквы k.

115. Так как $a^{\omega}=1+k\omega$, то

$$a^{i\omega}=(1+k\omega)^{i},$$

какое бы значение ни подставить вместо i. Итак, будет

$$a^{i\omega}=1+\frac{i}{1}k\omega+\frac{i(i-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2+\frac{i(i-1)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3+\text{ и т. д.}$$

Если положить $i=\frac{z}{\omega}$, где z обозначает какое-либо конечное число, то, так как ω — число бесконечно малое, число i будет бесконечно большим; но $\omega=\frac{z}{i}$, так что ω будет дробью с бесконечно большим знаменателем, следовательно, бесконечно малой, какой она и принята. Итак, подставим $\frac{z}{i}$ вместо ω; тогда будет

$$a^z=\left(1+\frac{kz}{i}\right)^i=1+\frac{1}{1}kz+\frac{1(i-1)}{1\cdot 2i}k^2z^2+\frac{1(i-1)(i-2)}{1\cdot 2i\cdot 3i}k^3z^3+$$
$$+\frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}k^4z^4+\text{ и т. д.};$$

равенство это будет верным, если вместо i подставить бесконечно большое число. Но вместе с тем k будет числом определенным, зависящим от a, как мы только что видели.

116. Так как i есть число бесконечно большое, то

$$\frac{i-1}{i}=1;$$

действительно, ясно, что чем большее число подставим вместо i, тем ближе значение дроби $\frac{i-1}{i}$ будет подходить к единице; если i станет больше всякого заданного числа, то дробь $\frac{i-1}{i}$ станет равна единице. Подобным же образом

$$\frac{i-2}{i}=1,\quad \frac{i-3}{i}=1$$

и так далее; отсюда следует, что

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2},\quad \frac{i-2}{3i}=\frac{1}{3},\quad \frac{i-3}{4i}=\frac{1}{4}$$

и так далее. Подставляя эти значения, получим

$$a^z=1+\frac{kz}{1}+\frac{k^2z^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{ и т. д. до бесконечности.}$$

Это равенство вместе с тем показывает соотношение между числами a и k; действительно, если положить $z=1$, то будет

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\text{ и т. д.},$$

и если $a=10$, то, приближенно, $k=2{,}30258$, как мы нашли раньше.

117. Положим

$$b = a^n;$$

тогда, принимая число a за основание логарифмов, будем иметь $lb = n$. Так как $b^z = a^{nz}$, то получаем отсюда бесконечный ряд

$$b^z = 1 + \frac{knz}{1} + \frac{k^2n^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3n^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4n^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}$$

или, подставляя lb вместо n,

$$b^z = 1 + \frac{kz}{1} lb + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2}(lb)^2 + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}(lb)^3 + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(lb)^4 + \text{ и т. д.}$$

Если известно значение буквы k при данном значении основания a, то любое показательное количество b^z может быть выражено в виде бесконечного ряда, члены которого идут по степеням z. После этого покажем также, каким образом логарифмы могут выражаться бесконечными рядами.

118. Так как $a^\omega = 1 + k\omega$, причем ω есть бесконечно малая дробь, а соотношение между a и k определяется уравнением

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.},$$

то, беря a за основание логарифмов, будем иметь

$$\omega = l(1 + k\omega) \quad \text{и} \quad i\omega = l(1 + k\omega)^i.$$

Ясно, что чем большее число взять вместо i, тем больше степень $(1 + k\omega)^i$ превзойдет единицу; при i, равном бесконечному числу, значение степени

Но так как i бесконечно велико, то будем иметь

$$\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}, \quad \frac{2i-1}{3i}=\frac{2}{3}, \quad \frac{3i-1}{4i}=\frac{3}{4} \quad \text{и т. д.};$$

отсюда

$$i(1+x)^{\frac{1}{i}}=i+\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+ \text{ и т. д.}$$

и, следовательно,

$$l\,(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+ \text{ и т. д.}\right),$$

причем основание логарифмов равно a и k означает число, соответствующее этому основанию так, что

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\cdot 2}+\frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3}+ \text{ и т. д.}$$

120. Так как мы имеем ряд, равный логарифму числа $1+x$, то при его помощи по данному основанию a мы можем определить значение числа k. Если положим $1+x=a$, то, так как $la=1$, будем иметь

$$1=\frac{1}{k}\left[\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+ \text{ и т. д.}\right];$$

отсюда получаем

$$k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+ \text{ и т. д.}$$

Величина этого бесконечного ряда, если положить $a=10$, должна приблизительно быть $=2{,}30258$, хотя трудно понять, как может быть

$$2{,}30258=\frac{9}{1}-\frac{9^2}{2}+\frac{9^3}{3}-\frac{9^4}{4}+ \text{ и т. д.},$$

так как члены этого ряда непрерывно увеличиваются и, взяв даже несколько членов, нельзя получить суммы, близкой к истинной; средство для устранения этого неудобства будет дано вскоре [23].

121. Так как

$$l\,(1+x)=\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+ \text{ и т. д.}\right),$$

то при x отрицательном будет

$$l(1-x)=-\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+ \text{ и т. д.}\right).$$

Вычтем второй ряд из первого; тогда

$$l(1+x)-l(1-x)=l\,\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{k}\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+ \text{ и т. д.}\right).$$

Положим теперь

$$\frac{1+x}{1-x}=a,$$

так что

$$x=\frac{a-1}{a+1};$$

так как $la = 1$, то будем иметь

$$k = 2\left[\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \text{ и т. д.}\right];$$

из этого равенства можно найти значение k по основанию a.

Если основание $a = 10$, то

$$k = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3\cdot 11^3} + \frac{9^5}{5\cdot 11^5} + \frac{9^7}{7\cdot 11^7} + \text{ и т. д.}\right);$$

члены этого ряда заметно убывают, и поэтому скоро дают для k достаточно близкое значение.

122. Так как для построения системы логарифмов можно принять какое угодно основание a, то его можно выбрать так, чтобы было $k = 1$. Пусть, следовательно, $k = 1$; тогда из найденного выше (§ 116) ряда

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.};$$

если эти члены обратить в десятичные дроби и действительно сложить, то они дадут для a значение

$$2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 028,$$

верное вплоть до последнего знака.

Логарифмы, построенные при этом основании, обычно называются *натуральными* или *гиперболическими*, ибо квадратура гиперболы может быть выражена посредством логарифмов этого рода. Будем, ради краткости, вместо числа 2,71828 18284 59 и т. д. писать постоянно букву

$$e,$$

которая и будет обозначать основание натуральных или гиперболических логарифмов [24], ему соответствует $k = 1$; эта буква e будет выражать также сумму ряда

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д. до бесконечности.}$$

123. Итак, гиперболические логарифмы будут обладать тем свойством, что для числа $1 + \omega$ логарифм будет равен ω, если ω означает бесконечно малое количество; так как из этого свойства очевидно значение $k = 1$, то могут быть найдены гиперболические логарифмы всех чисел. Действительно, если найденное выше число обозначить через e, то всегда

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.}$$

Самые же гиперболические логарифмы найдутся из следующих рядов:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{ и т. д.}$$

и

$$l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{ и т. д.},$$

и ряды эти весьма быстро[1]) сходятся, если вместо x подставить очень

[1]) vehementer.

малую дробь; таким путем из последнего ряда легко находятся логарифмы чисел, немного больших единицы. Если положить $x=\frac{1}{5}$, то будет

$$l\frac{6}{4}=l\frac{3}{2}=\frac{2}{1\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5^3}+\frac{2}{5\cdot 5^5}+\frac{2}{7\cdot 5^7}+\text{ и т. д.};$$

при $x=\frac{1}{7}$ будет

$$l\frac{4}{3}=\frac{2}{1\cdot 7}+\frac{2}{3\cdot 7^3}+\frac{2}{5\cdot 7^5}+\frac{2}{7\cdot 7^7}+\text{ и т. д.};$$

при $x=\frac{1}{9}$ будет

$$l\frac{5}{4}=\frac{2}{1\cdot 9}+\frac{2}{3\cdot 9^3}+\frac{2}{5\cdot 9^5}+\frac{2}{7\cdot 9^7}+\text{ и т. д.}$$

По логарифмам этих дробей найдутся логарифмы целых чисел; так, по природе логарифмов,

$$l\frac{3}{2}+l\frac{4}{3}=l2,$$

затем

$$l\frac{3}{2}+l2=l3 \quad\text{и}\quad 2l2=l4,$$

далее

$$l\frac{5}{4}+l4=l5,\quad l2+l3=l6,\quad 3l2=l8,\quad 2l3=l9\quad\text{и}\quad l2+l5=l10.$$

ПРИМЕР

Отсюда гиперболические логарифмы чисел от 1 до 10 будут таковы:

$l1=0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000$
$l2=0{,}69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321$
$l3=1{,}09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 52452$
$l4=1{,}38629\ 43611\ 19890\ 61883\ 44642$
$l5=1{,}60943\ 79124\ 34100\ 37460\ 07593$
$l6=1{,}79175\ 94692\ 28055\ 00081\ 24774$
$l7=1{,}94591\ 01490\ 55313\ 30510\ 53527$
$l8=2{,}07944\ 15416\ 79835\ 92825\ 16964$
$l9=2{,}19722\ 45773\ 36219\ 38279\ 04905$
$l10=2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79915$ [1]).

Все эти логарифмы выведены из вышеуказанных трех рядов, за исключением $l7$, который я получил следующим способом. Я принял в последнем ряде $x=\frac{1}{99}$ и получил

$$l\frac{100}{98}=l\frac{50}{49}=0{,}02020\ 27073\ 17519\ 44840\ 80453\ ^{2)};$$

[1]) Значения $l6$, $l7$ и $l10$ исправлены в соответствии с Opera omnia.
[2]) Последние цифры исправлены в соответствии с Opera omnia.

при вычитании его из

$$l50 = 2l5 + l2 = 3{,}91202\ 30054\ 28146\ 05861\ 87508$$

остается $l49$, половина которого дает $l7$.

124. Положим гиперболический логарифм от $1+x$, т. е. $l(1+x)=y$, тогда

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ и т. д.}$$

Возьмем теперь за основание логарифмов число a, и пусть логарифм того же числа $1+x$ будет равен v, тогда как мы видели

$$v = \frac{1}{k}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ и т. д.}\right) = \frac{y}{k},$$

откуда

$$k = \frac{y}{v}.$$

Таким образом, значение k, соответствующее основанию a, весьма удобно определяется как равное гиперболическому логарифму любого числа, деленному на логарифм того же числа при основании a. Значит, положив это число равным a, получим $v=1$, и, следовательно, k равно гиперболическому логарифму основания a. В системе обыкновенных логарифмов, где $a=10$, k будет равно гиперболическому логарифму 10, откуда

$$k = 2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79915$$[1];

величину эту мы нашли выше достаточно близко. Если делить отдельные гиперболические логарифмы на это число k, или, что то же, множить на десятичную дробь

$$0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289$$[1]),

то получатся обыкновенные логарифмы, соответствующие основанию $a=10$.

125. Так как

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.},$$

то, полагая $a^y = e^z$ и беря гиперболические логарифмы, получим $yla = z$, так как $le = 1$. Подставляя теперь это значение вместо z, получим

$$a^y = 1 + \frac{yla}{1} + \frac{y^2(la)^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3(la)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.};$$

отсюда любое показательное количество может быть выражено посредством бесконечного ряда при помощи гиперболических логарифмов.

Если i будет означать бесконечно большое число, то как показательные количества, так и логарифмы могут быть выражены при помощи

[1]) Это число исправлено в соответствии с Opera omnia.

степеней. Именно, будет

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$$

[25]; отсюда

$$a^y = \left(1 + \frac{yla}{i}\right)^i;$$

далее для гиперболических логарифмов

$$l(1+x) = i\left[(1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right].$$

В остальном употребление гиперболических логарифмов будет более полно показано в интегральном исчислении.

ГЛАВА VIII

О ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ КОЛИЧЕСТВАХ, ПОЛУЧАЮЩИХСЯ ИЗ КРУГА

126. После логарифмов и показательных количеств следует рассмотреть дуги круга, а также их синусы и косинусы, потому что они не только составляют другой род трансцендентных количеств, но и выводятся из самих логарифмов и показательных величин, когда те содержат мнимые количества; это более ясно обнаружится ниже.

Положим, что радиус круга или полный синус равен единице [26]; при этом достаточно ясно, что окружность этого круга рациональными числами выразить точно нельзя; приближенно же полуокружность этого круга найдена [27] равной

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46+;

вместо этого числа, ради краткости, я буду писать π, так что π равно полуокружности круга, радиус которого равен единице, то есть будет длиной дуги в 180 градусов [28].

127. Пусть z означает какую-либо дугу этого круга, радиус которого я всегда считаю равным единице; обычно преимущественно рассматриваются синус и косинус этой дуги. Синус дуги z я буду в дальнейшем обозначать *sin. A. z* или просто *sin. z*, косинус же таким образом: *cos. A. z* или просто *cos. z*¹).

Так как π есть дуга 180°, то будет

$$\sin 0\pi = 0, \qquad \cos 0\pi = 1,$$

и

$$\sin\frac{1}{2}\pi = 1, \qquad \cos\frac{1}{2}\pi = 0,$$

$$\sin\pi = 0, \qquad \cos\pi = -1,$$

$$\sin\frac{3}{2}\pi = -1, \quad \cos\frac{3}{2}\pi = 0,$$

$$\sin 2\pi = 0, \qquad \cos 2\pi = 1.$$

¹) В дальнейшем, следуя общепринятому теперь обозначению, мы точку и букву A опускаем и пишем sin и cos прямым, а не курсивом. Точно так же и для остальных тригонометрических функций мы пользуемся современными обозначениями. [*С. Л.*]

Все синусы и косинусы заключаются между пределами $+1$ и -1. Затем будет

$$\cos z = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) \quad \text{и} \quad \sin z = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - z\right),$$

а также

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1.$$

Кроме этих обозначений следует отметить еще: $\operatorname{tg} z$, что означает тангенс дуги z, и $\operatorname{ctg} z$ — котангенс дуги z; как известно из тригонометрии,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{\operatorname{tg} z}.$$

128. Также известно, что если имеются две дуги y и z, то будет

$$\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$$

и

$$\cos(y+z) = \cos y \cos z - \sin y \sin z,$$

а также

$$\sin(y-z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z$$

и

$$\cos(y-z) = \cos y \cos z + \sin y \sin z.$$

Отсюда, подставляя вместо y дуги $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ и т. д., получим

$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi + z\right) = -\sin z$	$\sin\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - z\right) = +\sin z$
$\sin(\pi + z) = -\sin z$ $\cos(\pi + z) = -\cos z$	$\sin(\pi - z) = +\sin z$ $\cos(\pi - z) = -\cos z$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + z\right) = +\sin z$	$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - z\right) = -\cos z$ $\cos\left(\frac{3}{2}\pi - z\right) = -\sin z$
$\sin(2\pi + z) = +\sin z$ $\cos(2\pi + z) = +\cos z$	$\sin(2\pi - z) = -\sin z$ $\cos(2\pi - z) = +\cos z$

Если n будет означать какое-либо целое число, то

$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi + z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{3}\pi + z\right) = -\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\cos z$ $\cos\left(\frac{4n+1}{2}\pi - z\right) = +\sin z$

$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=+\sin z$
$\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\cos z$	$\cos\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=-\cos z$
$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=-\cos z$	$\sin\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\cos z$
$\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=+\sin z$	$\cos\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\sin z$
$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\sin z$	$\sin\left(\frac{4n+4}{2}\pi-z\right)=-\sin z$
$\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\cos z$	$\cos\left(\frac{4n+4}{2}\pi-z\right)=+\cos z$

Формулы эти верны, будет ли n положительным или отрицательным целым числом.

129. Пусть

$$\sin z=p \quad \text{и} \quad \cos z=q;$$

тогда

$$p^2+q^2=1;$$

если

$$\sin y=m \quad \text{и} \quad \cos y=n,$$

то также

$$m^2+n^2=1.$$

Синусы и косинусы составленных из них дуг будут таковы:

$\sin z=p$	$\cos z=q$
$\sin(y+z)=mq+np$	$\cos(y+z)=nq-mp$
$\sin(2y+z)=2mnq+(n^2-m^2)p$	$\cos(2y+z)=(n^2-m^2)q-2mnp$
$\sin(3y+z)=(3mn^2-m^3)q+$ $+(n^3-3m^2n)p$	$\cos(3y+z)=(n^3-3m^2n)q-$ $-(3mn^2-m^3)p$
и т. д.	и т. д.

Дуги эти

$$z, \quad y+z, \quad 2y+z, \quad 3y+z \text{ и т. д.}$$

возрастают в арифметической прогрессии; их же синусы и косинусы составляют рекуррентную последовательность, которая возникает из знаменателя

$$1-2nx+(m^2+n^2)x^2;$$

действительно

$$\sin(2y+z)=2n\sin(y+z)-(m^2+n^2)\sin z,$$

или

$$\sin(2y+z)=2\cos y\sin(y+z)-\sin z;$$

подобным образом

$$\cos(2y+z)=2\cos y\cos(y+z)-\cos z.$$

Аналогично имеем дальше

$$\sin(3y+z)=2\cos y\sin(2y+z)-\sin(y+z)$$

и

$$\cos(3y+z)=2\cos y\cos(2y+z)-\cos(y+z),$$

а также

$$\sin(4y+z)=2\cos y\sin(3y+z)-\sin(2y+z)$$

и

$$\cos(4y+z)=2\cos y\cos(3y+z)-\cos(2y+z)$$

и т. д.

Благодаря этому закону как синусы, так и косинусы дуг, возрастающих в арифметической прогрессии, могут быть легко образуемы доколе угодно.

130. Так как

$$\sin(y+z)=\sin y\cos z+\cos y\sin z$$

и

$$\sin(y-z)=\sin y\cos z-\cos y\sin z,$$

то, складывая и вычитая эти выражения, получим

$$\sin y\cos z=\frac{\sin(y+z)+\sin(y-z)}{2},$$

$$\cos y\sin z=\frac{\sin(y+z)-\sin(y-z)}{2}.$$

Далее, так как

$$\cos(y+z)=\cos y\cos z-\sin y\sin z,$$

а также

$$\cos(y-z)=\cos y\cos z+\sin y\sin z,$$

то таким же образом

$$\cos y\cos z=\frac{\cos(y-z)+\cos(y+z)}{2},$$

$$\sin y\sin z=\frac{\cos(y-z)-\cos(y+z)}{2}.$$

Если

$$y=z=\frac{1}{2}v,$$

то из последних формул получаем

$$\left(\cos\frac{1}{2}v\right)^2=\frac{1+\cos v}{2}\quad\text{и}\quad\cos\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1+\cos v}{2}},$$

$$\left(\sin\frac{1}{2}v\right)^2=\frac{1-\cos v}{2}\quad\text{и}\quad\sin\frac{1}{2}v=\sqrt{\frac{1-\cos v}{2}},$$

откуда по данному косинусу любого угла находятся синус и косинус его половины.

131. Положим

$$y+z=a\quad\text{и}\quad y-z=b;$$

тогда

$$y=\frac{a+b}{2}\quad\text{и}\quad z=\frac{a-b}{2};$$

подставив это в предыдущие формулы, получим такие равенства, как бы четыре теоремы:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\cos b - \cos a = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$$

Отсюда, далее, путем деления получаются такие теоремы:

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \operatorname{ctg} \frac{a-b}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a-b}{2}},$$

$$\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b} = \operatorname{tg} \frac{a+b}{2},$$

$$\frac{\sin a+\sin b}{\cos b-\cos a} = \operatorname{ctg} \frac{a-b}{2},$$

$$\frac{\sin a-\sin b}{\cos a+\cos b} = \operatorname{tg} \frac{a-b}{2},$$

$$\frac{\sin a-\sin b}{\cos b-\cos a} = \operatorname{ctg} \frac{a+b}{2},$$

$$\frac{\cos a+\cos b}{\cos b-\cos a} = \operatorname{ctg} \frac{a+b}{2} \operatorname{ctg} \frac{a-b}{2}.$$

Наконец, из этих равенств выводятся такие теоремы:

$$\frac{\sin a+\sin b}{\cos a+\cos b} = \frac{\cos b-\cos a}{\sin a-\sin b},$$

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b} \times \frac{\cos a+\cos b}{\cos b-\cos a} = \left(\operatorname{ctg} \frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$\frac{\sin a+\sin b}{\sin a-\sin b} \times \frac{\cos b-\cos a}{\cos a+\cos b} = \left(\operatorname{tg} \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

132. Так как

$$(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1,$$

то по разложении на множители получим

$$\left(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z\right)\left(\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z\right) = 1;$$

эти множители, хотя и мнимые, имеют широчайшее применение при сложении и перемножении дуг. Пусть, например, требуется найти произведение множителей

$$\left(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z\right)\left(\cos y + \sqrt{-1} \cdot \sin y\right);$$

находим

$$\cos y \cos z - \sin y \sin z + \sqrt{-1} \cdot (\cos y \sin z + \sin y \cos z).$$

Но так как

$$\cos y \cos z - \sin y \sin z = \cos (y+z)$$

и

$$\cos y \sin z + \sin y \cos z = \sin (y+z),$$

то наше произведение

$$(\cos y+\sqrt{-1}\cdot\sin y)(\cos z+\sqrt{-1}\cdot\sin z)=\cos(y+z)+\sqrt{-1}\cdot\sin(y+z),$$

и подобным же образом

$$(\cos y-\sqrt{-1}\cdot\sin y)(\cos z-\sqrt{-1}\cdot\sin z)=\cos(y+z)-\sqrt{-1}\cdot\sin(y+z),$$

а также

$$(\cos x\pm\sqrt{-1}\cdot\sin x)(\cos y\pm\sqrt{-1}\cdot\sin y)(\cos z\pm\sqrt{-1}\cdot\sin z)=$$
$$=\cos(x+y+z)\pm\sqrt{-1}\cdot\sin(x+y+z).$$

133. Отсюда следует, что

$$(\cos z\pm\sqrt{-1}\cdot\sin z)^2=\cos 2z\pm\sqrt{-1}\cdot\sin 2z$$

и

$$(\cos z\pm\sqrt{-1}\cdot\sin z)^3=\cos 3z\pm\sqrt{-1}\cdot\sin 3z,$$

и вообще будет [29]

$$(\cos z\pm\sqrt{-1}\cdot\sin z)^n=\cos nz\pm\sqrt{-1}\cdot\sin nz.$$

Отсюда, ввиду двойных знаков, получаем

$$\cos nz=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\cdot\sin z)^n+(\cos z-\sqrt{-1}\cdot\sin z)^n}{2}$$

и

$$\sin nz=\frac{(\cos z+\sqrt{-1}\cdot\sin z)^n-(\cos z-\sqrt{-1}\cdot\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Таким образом, если эти двучлены развернуть в ряды, то будет

$$\cos nz=(\cos z)^n-\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\times$$
$$\times(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(\cos z)^{n-6}(\sin z)^6+\text{и т. д.}$$

и

$$\sin nz=\frac{n}{1}(\cos z)^{n-1}\sin z-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos z)^{n-3}(\sin z)^3+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\cos z)^{n-5}(\sin z)^5-\text{и т. д.}$$

134. Пусть z — бесконечно малая дуга; тогда $\sin z=z$ и $\cos z=1$; пусть, кроме того, число n будет бесконечно велико, дабы дуга nz была конечной величины. Положим $nz=v$; так как $\sin z=z=\frac{v}{n}$, то будет

$$\cos v=1-\frac{v^2}{1\cdot 2}+\frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\text{ и т. д.}$$

и

$$\sin v=v-\frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\text{ и т. д.}$$

Итак, если дана дуга v, то при помощи этих рядов могут быть найдены ее синус и косинус. Чтобы применение этих формул стало более ясным, положим, что дуга v так относится к четверти окружности, т. е. к дуге 90°, как m к n, или что $v=\frac{m}{n}\cdot\frac{\pi}{2}$. Так как значение π теперь известно, то, подставляя его всюду, получим

$$\begin{aligned}
\sin\frac{m}{n}\cdot 90 = &+\frac{m}{n}\cdot 1{,}57079\ 63267\ 94896\ 61923\ 13216\ 916\\
&-\frac{m^3}{n^3}\cdot 0{,}64596\ 40975\ 06246\ 25365\ 57565\ 639\\
&+\frac{m^5}{n^5}\cdot 0{,}07969\ 26262\ 46167\ 04512\ 05055\ 495\\
&-\frac{m^7}{n^7}\cdot 0{,}00468\ 17541\ 35318\ 68810\ 06854\ 639\\
&+\frac{m^9}{n^9}\cdot 0{,}00016\ 04411\ 84787\ 35982\ 18726\ 609\\
&-\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0{,}00000\ 35988\ 43235\ 21208\ 53404\ 585\\
&+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0{,}00000\ 00569\ 21729\ 21967\ 92681\ 178\\
&-\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0{,}00000\ 00006\ 68803\ 51098\ 11467\ 232\\
&+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 06066\ 93573\ 11061\ 957\\
&-\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00043\ 77065\ 46731\ 374\\
&+\frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 25714\ 22892\ 860\\
&-\frac{m^{23}}{n^{23}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00125\ 38995\ 405\\
&+\frac{m^{25}}{n^{25}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 51564\ 552\\
&-\frac{m^{27}}{n^{27}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00181\ 240\\
&+\frac{m^{29}}{n^{29}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 551\ ^{1)},
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
\cos\frac{m}{n}90^\circ = &+\phantom{\frac{m^2}{n^2}\cdot}1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 000\\
&-\frac{m^2}{n^2}\cdot 1{,}23370\ 05501\ 36169\ 82735\ 43113\ 750\\
&+\frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}25366\ 95079\ 01048\ 01363\ 65633\ 664\\
&-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}02086\ 34807\ 63352\ 96087\ 30516\ 372\\
&+\frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}00091\ 92602\ 74839\ 42658\ 02417\ 162\\
&-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00002\ 52020\ 42373\ 06060\ 54810\ 530
\end{aligned}$$

[1]) Некоторые из числовых коэффициентов исправлены в соответствии с Opera omnia.

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000\ 04710\ 87477\ 88181\ 71503\ 670$$
$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000\ 00063\ 86603\ 08379\ 18522\ 411$$
$$+\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 65659\ 63114\ 97947\ 236$$
$$-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00529\ 44002\ 00734\ 624$$
$$+\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00003\ 43773\ 91790\ 986$$
$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 01835\ 99165\ 216$$
$$+\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00008\ 20675\ 330$$
$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 03115\ 285$$
$$+\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00010\ 168$$
$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 029\ ^{1)}.$$

Так как достаточно знать синусы и косинусы углов до 45°, то дробь $\frac{m}{n}$ всегда будет меньше, чем $\frac{1}{2}$; поэтому вследствие наличия степеней дроби $\frac{m}{n}$ полученные ряды весьма быстро сходятся, так что по большей части достаточно лишь нескольких первых членов, особенно если не требуется определения синуса и косинуса со столь многими знаками.

135. Если найдены синусы и косинусы, то можно также найти тангенсы и котангенсы по их отношениям, но так как умножение и деление при таких громадных числах весьма утомительно, то следует выразить тангенсы и котангенсы особым образом. Итак, имеем

$$\operatorname{tg} v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7} + \text{ и т. д.}}{1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6} + \text{ и т. д.}}$$

и

$$\operatorname{ctg} v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6} + \text{ и т. д.}}{v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7} + \text{ и т. д.}}.$$

Если дуга $v = \frac{m}{n}90°$, то аналогично предыдущему получится

$$\operatorname{tg}\frac{m}{n}90° = +\frac{2mn}{n^2-m^2}\cdot 0{,}63661\ 97723\ 676 + \frac{m}{n}\cdot 0{,}29755\ 67820\ 597 + \frac{m^3}{n^3}\cdot 0{,}01868\ 86502\ 773$$

$$\operatorname{ctg}\frac{m}{n}90° = +\frac{n}{m}\cdot 0{,}63661\ 97723\ 676 - \frac{4mn}{4n^2-m^2}\cdot 0{,}31830\ 98861\ 838 - \frac{m}{n}\cdot 0{,}20528\ 88894\ 145$$

1) Некоторые из числовых коэффициентов исправлены в соответствии с Opera omnia.

$$+\frac{m^5}{n^5}\cdot 0{,}00184\ 24752\ 034$$
$$+\frac{m^7}{n^7}\cdot 0{,}00019\ 75800\ 715$$
$$+\frac{m^9}{n^9}\cdot 0{,}00002\ 16977\ 373$$
$$+\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0{,}00000\ 24011\ 370$$
$$+\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0{,}00000\ 02664\ 133$$
$$+\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0{,}00000\ 00295\ 865$$
$$+\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0{,}00000\ 00032\ 868$$
$$+\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0{,}00000\ 00003\ 652$$
$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 406$$
$$+\frac{m^{23}}{n^{23}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 045$$
$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 005\,^{1}).$$

$$-\frac{m^3}{n^3}\cdot 0{,}00655\ 10747\ 882$$
$$-\frac{m^5}{n^5}\cdot 0{,}00034\ 50292\ 554$$
$$-\frac{m^7}{n^7}\cdot 0{,}00002\ 02791\ 061$$
$$-\frac{m^9}{n^9}\cdot 0{,}00000\ 12366\ 527$$
$$-\frac{m^{11}}{n^{11}}\cdot 0{,}00000\ 00764\ 959$$
$$-\frac{m^{13}}{n^{13}}\cdot 0{,}00000\ 00047\ 597$$
$$-\frac{m^{15}}{n^{15}}\cdot 0{,}00000\ 00002\ 969$$
$$-\frac{m^{17}}{n^{17}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 185$$
$$-\frac{m^{19}}{n^{19}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 012\,^{1}).$$

Способ получения этих рядов будет подробно разъяснен ниже.

136. Из сказанного выше известно, что если найдены синусы и косинусы всех углов, меньших половины прямого, то это вместе с тем дает синусы и косинусы всех бо́льших углов. Но даже если имеются только синусы и косинусы углов, меньших 30°, то и по ним путем сложения или вычитания могут быть найдены синусы и косинусы всех бо́льших углов. Действительно, так как

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

то при $y = 30^\circ$ (по § 130) будет

$$\cos z = \sin(30^\circ + z) + \sin(30^\circ - z)$$

и

$$\sin z = \cos(30^\circ - z) - \cos(30^\circ + z),$$

и, таким образом, по синусам и косинусам углов z и $30^\circ - z$ найдутся

$$\sin(30^\circ + z) = \cos z - \sin(30^\circ - z)$$

и

$$\cos(30^\circ + z) = \cos(30^\circ - z) - \sin z,$$

откуда определяются синусы и косинусы углов от 30 до 60°, а затем и всех бо́льших.

[1]) Некоторые из числовых коэффициентов исправлены в соответствии с Opera omnia.

137. Подобное же вспомогательное средство можно применить для тангенсов и котангенсов. Так как

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

то

$$\operatorname{tg} 2a=\frac{2 \operatorname{tg} a}{1-(\operatorname{tg} a)^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} 2a=\frac{\operatorname{ctg} a-\operatorname{tg} a}{2};$$

отсюда по тангенсам и котангенсам дуг, меньших 30°, находятся котангенсы вплоть до 60°.

Если $a=30°-b$, то $2a=60°-2b$ и $\operatorname{ctg} 2a=\operatorname{tg}(30°+2b)$; значит,

$$\operatorname{tg}(30°+2b)=\frac{\operatorname{ctg}(30°-b)-\operatorname{tg}(30°-b)}{2},$$

откуда получаются также тангенсы дуг, бо́льших 30°.

Секансы же и косекансы находятся по тангенсам путем одного лишь вычитания, так как

$$\operatorname{cosec} z=\operatorname{ctg}\frac{1}{2} z-\operatorname{ctg} z,$$

откуда

$$\sec z=\operatorname{ctg}\left(45°-\frac{1}{2} z\right)-\operatorname{tg} z.$$

Из сказанного достаточно ясно, каким образом могли бы быть составлены таблицы синусов.

138. Положим снова в формулах § 133 дугу z бесконечно малой, и пусть n будет бесконечно большим числом i, так что iz получит конечное значение v. Итак, будет $nz=v$ и $z=\frac{v}{i}$; отсюда $\sin z=\frac{v}{i}$ и $\cos z=1$; подставляя это, получим

$$\cos v=\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i+\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

и

$$\sin v=\frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i-\left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

В предыдущей же главе мы видели, что

$$\left(1+\frac{z}{i}\right)^i=e^z,$$

где e означает основание гиперболических логарифмов; если вместо z написать в одном случае $+v\sqrt{-1}$, в другом $-v\sqrt{-1}$, то получим

$$\cos v=\frac{e^{+v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

и

$$\sin v=\frac{e^{+v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Отсюда понятно, каким образом мнимые показательные количества приводятся к синусам и косинусам действительных дуг [30]. Именно,

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1} \cdot \sin v$$

и

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1} \cdot \sin v.$$

139. Теперь пусть n в тех же формулах § 133 будет уже не бесконечно большим, а бесконечно малым числом, то есть $n = \frac{1}{i}$ при i бесконечно большом [31]; тогда

$$\cos nz = \cos\frac{z}{i} = 1 \text{ и } \sin nz = \sin\frac{z}{i} = \frac{z}{i},$$

потому что синус исчезающей дуги $\frac{z}{i}$ равен ей самой, а косинус равен единице. Подставив это, получим

$$1 = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z)^{\frac{1}{i}} + (\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)^{\frac{1}{i}}}{2}$$

и

$$\frac{z}{i} = \frac{(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z)^{\frac{1}{i}} - (\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Если взять гиперболические логарифмы, то, как мы выше (§ 125) показали,

$$l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i \quad \text{или} \quad y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i} ly,$$

при подстановке y вместо $1+x$. Теперь, полагая вместо y в одном случае $\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z$, в другом $\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z$, получим

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{i} l(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z) + 1 + \frac{1}{i} l(\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)}{2},$$

т. е. при исчезающих логарифмах, $1 = 1$, так что отсюда ничего не вытекает. Другое же уравнение для синуса дает

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i} l(\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z) - \frac{1}{i} l(\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z)}{2\sqrt{-1}}$$

и вследствие этого $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{\cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z}{\cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z}$, откуда ясно, каким образом мнимые логарифмы приводятся к дугам круга.

140. Так как $\frac{\sin z}{\cos z} = \operatorname{tg} z$, то дуга z выражается через свой тангенс так:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{1 + \sqrt{-1} \operatorname{tg} z}{1 - \sqrt{-1} \operatorname{tg} z}.$$

Выше (§ 123) мы видели, что

$$l\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+ \text{ и т. д.}$$

Полагая $x=\sqrt{-1}\cdot\operatorname{tg} z$, получим

$$z=\frac{\operatorname{tg} z}{1}-\frac{(\operatorname{tg} z)^3}{3}+\frac{(\operatorname{tg} z)^5}{5}-\frac{(\operatorname{tg} z)^7}{7}+ \text{ и т. д.}$$

Если же положить $\operatorname{tg} z=t$, то есть z будет дугой, тангенс которой равен t, что мы будем обозначать $A.tang\, t$[1]), то

$$z=\operatorname{arctg} t.$$

Если известен тангенс t, то соответствующая ему дуга z будет

$$z=\frac{t}{1}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}- \text{ и т. д.}$$

Если тангенс t равен радиусу единица, то z равен дуге 45°, или $z=\frac{\pi}{4}$, и будет

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+ \text{ и т. д.};$$

этот ряд впервые был выведен Лейбницем для выражения окружности круга [32].

141. Чтобы из этого ряда можно было удобно определить дугу круга, нужно, разумеется, подставить вместо тангенса достаточно малую дробь. Так, при помощи этого ряда легко найдется длина дуги z, тангенс которой t будет равен $\frac{1}{10}$; именно, эта дуга будет

$$z=\frac{1}{10}-\frac{1}{3000}+\frac{1}{500\,000}- \text{ и т. д.};$$

значение этого ряда нетрудно приближенно выразить десятичной дробью. Но и зная такую дугу, нельзя будет вывести заключение относительно длины всей окружности, так как отношение дуги, тангенс которой равен $\frac{1}{10}$, ко всей окружности не может быть выражено. Поэтому для нахождения длины окружности следует искать такую дугу, которая вместе с тем была бы некоторой частью окружности и у которой достаточно малый тангенс может быть удобно выражен. Для этой цели обычно берут дугу 30°, тангенс которой равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$, так как тангенсы меньших дуг, соизмеримых с окружностью, будут слишком сложными иррациональностями[2]). Так как дуга $30°=\frac{\pi}{6}$, то

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\cdot 3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\cdot 3^2\sqrt{3}}- \text{ и т. д.}$$

и

$$\pi=\frac{2\sqrt{3}}{1}-\frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3}+\frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2}-\frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3}+ \text{ и т. д.}$$

---

[1]) Мы придерживаемся в дальнейшем переводе общепринятого сейчас обозначения.

[2]) nimis sunt irrationales — буквально: *являются слишком иррациональными.*

При помощи этого ряда приведенное выше (§ 126) значение π было определено с невероятным трудом.

142. Этот труд тем значительнее, что, во-первых, отдельные члены иррациональны, а затем каждый из них будет лишь приблизительно в три раза меньше предыдущего. Это неудобство можно обойти так: возьмем дугу 45° или $\frac{\pi}{4}$; хотя ее значение и выражается лишь едва сходящимся рядом

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+ \text{ и т. д.},$$

однако оставим эту дугу, но разобьем ее на две дуги a и b, так что $a+b=\frac{\pi}{4}=45°$. Но так как

$$\operatorname{tg}(a+b)=1=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

то

$$1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b=\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b$$

и

$$\operatorname{tg} b=\frac{1-\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a}.$$

Теперь, если $\operatorname{tg} a=\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg} b$ будет равен $\frac{1}{3}$; отсюда обе дуги a и b выразятся рациональным рядом, сходящимся гораздо быстрее предыдущего, причем сумма их даст значение дуги $\frac{\pi}{4}$; итак, отсюда

$$\pi=4\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}- \text{ и т. д.} \\ \frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}- \text{ и т. д.}\end{array}\right\}.$$

Таким способом длина полуокружности π может быть найдена гораздо скорее, чем это было сделано с помощью упомянутого выше ряда [32bis].

ГЛАВА IX

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ТРЕХЧЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

143. Выше мы показали, как нужно находить простые множители всякой целой функции; это делается путем решения уравнений. Итак, если дана какая-либо целая функция

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+ \text{ и т. д.}$$

и нужно найти ее простые множители вида $p-qz$, то ясно, что когда $p-qz$ будет множителем функции $\alpha+\beta z+\gamma z^2+$ и т. д., то при $z=\frac{p}{q}$ и сам множитель $p-qz$ становится равным нулю, и данная функция должна исчезнуть. Следовательно, если $p-qz$ будет множителем или делителем функции

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+ \text{ и т. д.},$$

то

$$\alpha+\frac{\beta p}{q}+\frac{\gamma p^2}{q^2}+\frac{\delta p^3}{q^3}+\frac{\varepsilon p^4}{q^4}+ \text{ и т. д.}=0.$$

Обратно, если найдены все корни $\frac{p}{q}$ этого уравнения, то они дадут столько же простых множителей данной функции

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+ \text{ и т. д.},$$

именно: $p-qz$. Вместе с тем также ясно, что число этих простых множителей определяется наибольшей степенью z.

144. Однако этим способом получить мнимые множители большей частью бывает трудно; поэтому в этой главе я изложу особый способ, при помощи которого часто возможно бывает найти мнимые множители. Вследствие того, что мнимые множители соединяются так, что произведение каждой пары действительно, мы найдем мнимые множители, если исследуем двойные множители, т. е. множители вида

$$p-qz+rz^2,$$

которые действительны, но простые множители которых мнимы. Если будут известны все действительные двойные множители трехчленного вида $p-qz+rz^2$ функции $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+$ и т. д., то вместе с тем получатся и все мнимые множители.

145. Трехчлен $p-qz+rz^2$ будет иметь мнимые множители, если $4pr > q^2$, или

$$\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1.$$

Так как синусы и косинусы углов меньше единицы, то выражение $p-qz+rz^2$ будет иметь мнимые множители, если $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ равно синусу или косинусу некоторого угла. Пусть

$$\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos\varphi, \quad \text{или} \quad q = 2\sqrt{pr}\cdot\cos\varphi,$$

причем трехчлен $p-qz+rz^2$ имеет простые мнимые множители. Для того чтобы иррациональность не вызывала затруднений, я возьму форму $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$, мнимые множители которой будут

$$qz-p(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi) \quad \text{и} \quad qz-p(\cos\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi).$$

Впрочем, ясно, что здесь, когда $\cos\varphi=\pm 1$, оба множителя будут равными и действительными, так как $\sin\varphi=0$.

146. Если дана целая функция $\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+$ и т. д., то ее простые мнимые множители найдутся, если будут определены буквы p и q вместе с углом φ так, чтобы трехчлен $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$ стал множителем функции. Тогда одновременно в нее будут входить простые мнимые множители

$$qz-p(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi) \quad \text{и} \quad qz-p(\cos\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi).$$

Вследствие этого данная функция исчезнет как при подстановке

$$z=\frac{p}{q}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi),$$

так и при подстановке

$$z=\frac{p}{q}(\cos\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi).$$

Отсюда, если произвести ту и другую подстановки, то получатся два уравнения, из которых можно будет определить как дробь $\frac{p}{q}$, так и дугу φ.

147. Эти подстановки, которые нам надо осуществить, хотя на первый взгляд и кажутся трудными, однако выполняются довольно легко при помощи изложенного в предыдущей главе. Действительно, так как показано, что $(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)^n=\cos n\varphi\pm\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi$, то для подстановки вместо отдельных степеней z будем иметь следующие формулы:

для первого множителя	для второго множителя
$z=\frac{p}{q}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$,	$z=\frac{p}{q}(\cos\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)$,
$z^2=\frac{p^2}{q^2}(\cos 2\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin 2\varphi)$,	$z^2=\frac{p^2}{q^2}(\cos 2\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin 2\varphi)$,
$z^3=\frac{p^3}{q^3}(\cos 3\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin 3\varphi)$,	$z^3=\frac{p^3}{q^3}(\cos 3\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin 3\varphi)$,
$z^4=\frac{p^4}{q^4}(\cos 4\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin 4\varphi)$	$z^4=\frac{p^4}{q^4}(\cos 4\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin 4\varphi)$
и т. д.	и т. д.

Если положить для краткости $\frac{p}{q}=r$, то после подстановки получатся следующие два уравнения:

$$0=\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta r\cos\varphi+\gamma r^2\cos 2\varphi+\delta r^3\cos 3\varphi+\text{ и т. д.}\\ +\beta r\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi+\gamma r^2\sqrt{-1}\cdot\sin 2\varphi+\delta r^3\sqrt{-1}\cdot\sin 3\varphi+\text{ и т. д.}\end{array}\right\},$$

$$0=\left\{\begin{array}{l}\alpha+\beta r\cos\varphi+\gamma r^2\cos 2\varphi+\delta r^3\cos 3\varphi+\text{ и т. д.}\\ -\beta r\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi-\gamma r^2\sqrt{-1}\cdot\sin 2\varphi+\delta r^3\sqrt{-1}\cdot\sin 3\varphi-\text{ и т. д.}\end{array}\right\}.$$

148. Если эти два уравнения сначала сложить, а затем вычесть одно из другого, и в последнем случае разделить на $2\sqrt{-1}$, то получатся два таких действительных уравнения:

$$0=\alpha+\beta r\cos\varphi+\gamma r^2\cos 2\varphi+\delta r^3\cos 3\varphi+\text{ и т. д.},$$
$$0=\beta r\sin\varphi+\gamma r^2\sin 2\varphi+\delta r^3\cos 3\varphi+\text{ и т. д.},$$

которые можно составить тотчас же по виду данной функции

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4+\text{ и т. д.},$$

полагая сначала вместо каждой степени

$$z^n=r^n\cos n\varphi,$$

а затем

$$z^n=r^n\sin n\varphi.$$

Так как $\sin 0\varphi=0$ и $\cos 0\varphi=1$, то вместо z^0, т. е. единицы, в постоянном члене подставляется сначала единица, а потом нуль. Если из этих двух уравнений определятся неизвестные r и φ, то, так как $r=\frac{p}{q}$, получится и трехчленный множитель $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$, содержащий два простых мнимых множителя.

149. Если первое уравнение помножить на $\sin m\varphi$, а второе на $\cos m\varphi$ и произведения сложить, а затем вычесть одно из другого, то получатся два таких уравнения:

$$0=\alpha\sin m\varphi+\beta r\sin(m+1)\varphi+\gamma r^2\sin(m+2)\varphi+\delta r^3\sin(m+3)\varphi+\text{ и т. д.},$$
$$0=\alpha\sin m\varphi+\beta r\sin(m-1)\varphi+\gamma r^2\sin(m-2)\varphi+\delta r^3\sin(m-3)\varphi+\text{ и т. д.}$$

Если же первое уравнение помножить на $\cos m\varphi$, а второе на $\sin m\varphi$, то путем сложения и вычитания возникают такие уравнения:

$$0=\alpha\cos m\varphi+\beta r\cos(m-1)\varphi+\gamma r^2\cos(m-2)\varphi+\delta r^3\cos(m-3)\varphi+\text{ и т. д.},$$
$$0=\alpha\cos m\varphi+\beta r\cos(m+1)\varphi+\gamma r^2\cos(m+2)\varphi+\delta r^3\cos(m+3)\varphi+\text{ и т. д.}$$

Из этих уравнений любые два вместе взятые определят неизвестные r и φ; так как по большей части это может быть произведено многими способами, то получатся сразу многие трехчленные множители и даже все, какие содержит в себе данная функция.

150. Для того чтобы применение этих формул стало более ясным, мы здесь найдем трехчленные множители некоторых более часто встречающихся функций, чтобы можно было отсюда черпать эти множители всякий раз, когда это понадобится. Пусть дана функция

$$a^n + z^n,$$

для которой надо найти трехчленные множители вида

$$p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2.$$

Если положить $r = \frac{p}{q}$, то получатся два таких уравнения:

$$0 = a^n + r^n \cos n\varphi \quad \text{и} \quad 0 = r^n \sin n\varphi,$$

последнее из которых дает

$$\sin n\varphi = 0.$$

Отсюда $n\varphi$ будет дугой вида $(2k+1)\pi$ или $2k\pi$ при целом числе k. Я различаю эти случаи потому, что косинусы у них различны; в первом случае будет $\cos(2k+1)\pi = -1$, в последнем же $\cos 2k\pi = +1$. Ясно, что надо взять первый вид

$$n\varphi = (2k+1)\pi,$$

так как он дает $\cos n\varphi = -1$, откуда

$$0 = a^n - r^n,$$

и, далее,

$$r = a = \frac{p}{q}.$$

Итак,

$$p = a, \quad q = 1$$

и

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n};$$

отсюда множителем функции $a^n + z^n$ будет

$$a^2 - 2az\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + z^2.$$

Так как вместо k можно подставить любое целое число, то таким образом получится много множителей, однако же не бесконечное число, потому что если $2k+1$ возрастет свыше n, то станут повторяться прежние множители, так как $\cos(2\pi \pm \varphi) = \cos\varphi$; это более ясно будет видно на примерах. Далее, если n будет нечетным числом, то при $2k+1 = n$ получится множителем квадрат $a^2 + 2az + z^2$; однако отсюда не следует, что квадрат $(a+z)^2$ будет множителем функции $a^n + z^n$, так как (по § 148) получается только одно уравнение, из которого видно, что только $a+z$ будет делителем выражения $a^n + z^n$; этого правила следует придерживаться всякий раз, когда $\cos\varphi$ равен $+1$ или -1.

ПРИМЕР

Разберем несколько случаев, чтобы эти множители представились нагляднее, причем разделим эти случаи на два класса, смотря по тому, будет ли число n четным или нечетным:

если $n=1$, то у выражения $a+z$ множителем будет $a+z$	если $n=2$, то у выражения a^2+z^2 множителем будет a^2+z^2
если $n=3$, то у выражения a^3+z^3 множителями будут $a^2-2az\cos\frac{1}{3}\pi+z^2$, $a+z$	если $n=4$, то у выражения a^4+z^4 множителями будут $a^2-2az\cos\frac{1}{4}\pi+z^2$, $a^2-2az\cos\frac{3}{4}\pi+z^2$
если $n=5$, то у выражения a^5+z^5 множителями будут $a^2-2az\cos\frac{1}{5}\pi+z^2$, $a^2-2az\cos\frac{3}{5}\pi+z^2$, $a+z$	если $n=6$, то у выражения a^6+z^6 множителями будут $a^2-2az\cos\frac{1}{6}\pi+z^2$, $a^2-2az\cos\frac{3}{6}\pi+z^2$, $a^2-2az\cos\frac{5}{6}\pi+z^2$

Из этих примеров видно, что получатся все множители, если вместо $2k+1$ подставить все нечетные числа, не превосходящие показатель n; в тех же случаях, когда в качестве множителя получается квадрат, следует причислять ко множителям только корень из него.

151. Когда дана функция

$$a^n-z^n,$$

то ее трехчленным множителем будет

$$p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2,$$

если при $r = \frac{p}{q}$

$$0 = a^n - r^n \cos n\varphi \quad \text{и} \quad 0 = r^n \sin n\varphi.$$

Следовательно, и здесь будет

$$\sin n\varphi = 0,$$

и, значит, $n\varphi = (2k+1)\pi$ или $n\varphi = 2k\pi$. В данном случае надлежит брать второе значение, чтобы было $\cos n\varphi = +1$, что дает

$$0 = a^n - r^n \text{ и } r = \frac{p}{q} = a.$$

Таким образом, будет

$$p = a, \quad q = 1 \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{2k}{n}\pi;$$

отсюда трехчленный множитель данного выражения будет

$$a^2 - 2az\cos\frac{2k}{n}\pi + z^2.$$

Этот вид при подстановке вместо $2k$ всех четных чисел, не превышающих n, даст сразу все множители, причем относительно квадратных множителей надо принять во внимание сделанное выше замечание. Прежде всего, при $k=0$ получается множитель $a^2 - 2az + z^2$, вместо которого надо брать корень из него $a - z$. Аналогично, если n — четное число и подставим $2k = n$, то получится $a^2 + 2az + z^2$, откуда видно, что $a + z$ будет делителем выражения $a^n - z^n$.

ПРИМЕР

В зависимости от четности или нечетности показателя n получаем такой результат:

если $n = 1$, то у выражения $a - z$ множителем будет $a - z$	если $n = 2$, то у выражения $a^2 - z^2$ множителями будут $a - z$, $a + z$
если $n = 3$, то у выражения $a^3 - z^3$ множителями будут $a - z$, $a^2 - 2az\cos\frac{2}{3}\pi + z^2$	если $n = 4$, то у выражения $a^4 - z^4$ множителями будут $a - z$, $a^2 - 2az\cos\frac{2}{4}\pi + z^2$, $a + z$

если

$$n=5,$$

то у выражения

$$a^5-z^5$$

множителями будут

$$a-z,$$

$$a^2-2az\cos\frac{2}{5}\pi+z^2,$$

$$a^2-2az\cos\frac{4}{5}\pi+z^2$$

если

$$n=6,$$

то у выражения

$$a^6-z^6$$

множителями будут

$$a-z,$$

$$a^2-2az\cos\frac{2}{6}\pi+z^2,$$

$$a^2-2az\cos\frac{4}{6}\pi+z^2,$$

$$a+z$$

152. Этим подтверждается сказанное нами выше, что всякую целую функцию можно разложить, если не на простые действительные, то на двойные действительные множители. Ведь мы видели, что функция неопределенного измерения $a^n \pm z^n$ всегда может быть разложена на двойные действительные множители, кроме простых действительных. Перейдем поэтому к функциям более сложным, таким, как $\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}$, разложимость которой вполне ясна из предыдущего, если функция имеет два множителя вида $\eta+\theta z^n$. Нам остается только показать разложение выражения $\alpha+\beta z^n+\gamma z^{2n}$ на действительные простые или двойные множители в том случае, когда оно не содержит двух действительных множителей вида $\eta+\theta z^n$.

153. Рассмотрим функцию

$$a^{2n}-2a^nz^n\cos g+z^{2n},$$

которую нельзя разложить на два действительных множителя вида $\eta+\theta z^n$. Если положим, что двойной действительный множитель этой функции есть

$$p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2,$$

то при $r=\frac{p}{q}$ надо будет решить следующие два уравнения:

$$0=a^{2n}-2a^nr^n\cos g\cos n\varphi+r^{2n}\cos 2n\varphi$$

и

$$0=\ -2a^nr^n\cos g\sin n\varphi+r^{2n}\sin 2n\varphi.$$

Или же вместо первого уравнения по § 149 (полагая $m=2n$) можно взять уравнение

$$0=a^{2n}\sin 2n\varphi-2a^nr^n\cos g\sin n\varphi,$$

которое совместно с последним дает

$$r=a;$$

тогда

$$\sin 2n\varphi=2\cos g\sin n\varphi,$$

но

$$\sin 2n\varphi=2\sin n\varphi\cos n\varphi,$$

отсюда

$$\cos n\varphi=\cos g.$$

Так как всегда $\cos(2k\pi \pm g) = \cos g$, то

$$n\varphi = 2k\pi \pm g$$

и

$$\varphi = \frac{2k\pi \pm g}{n}.$$

Поэтому общий вид двойного множителя данного выражения будет

$$a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi \pm g}{n} + z^2;$$

при этом получатся все множители, если вместо $2k$ последовательно подставлять все четные числа, не превосходящие n, как это можно видеть из применения к частным случаям.

ПРИМЕР

Чтобы уяснить составление множителей, разберем случаи, когда n есть 1, 2, 3, 4 и т. д. Так, у выражения $a^2 - 2az\cos g + z^2$ будет единственный множитель $a^2 - 2az\cos g + z^2$; у выражения $a^4 - 2a^2z^2\cos g + z^4$ — два множителя:

$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{2} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi \pm g}{2} + z^2 \quad \text{или} \quad a^2 + 2az\cos\frac{g}{2} + z^2;$$

у выражения $a^6 - 2a^3z^3\cos g + z^6$ — три множителя:

$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{3} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{3} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{3} + z^2;$$

у выражения $a^8 - 2a^4z^4\cos g + z^8$ — четыре множителя:

$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{4} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{4} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{4} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{4\pi \pm g}{4} + z^2 \quad \text{или} \quad a^2 + 2az\cos\frac{g}{4} + z^2;$$

у выражения $a^{10} - 2a^5z^5\cos g + z^{10}$ — пять множителей:

$$a^2 - 2az\cos\frac{g}{5} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi - g}{5} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{2\pi + g}{5} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{4\pi - g}{5} + z^2,$$

$$a^2 - 2az\cos\frac{4\pi + g}{5} + z^2.$$

Этими примерами также подтверждается то, что всякую целую функцию можно разложить на действительные множители, простые или двойные.

154. Продолжая, следует перейти к функции

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n},$$

которая непременно будет иметь один действительный множитель вида $\eta + \theta z^n$, действительные множители которого, простые или двойные, могут быть найдены; другой же множитель вида $\iota + \varkappa z^n + \lambda z^{2n}$, как бы он ни был составлен, всегда на основании предыдущего параграфа равным образом может быть разложен на множители.

Далее, функция вида

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n}$$

также разлагается на простые или двойные действительные множители, так как она всегда имеет два действительных множителя вида $\eta + \theta z^n + \iota z^{2n}$. Можно перейти к форме

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n},$$

которая, наверно, имеет один множитель вида $\eta + \theta z^n$; другой же множитель будет предыдущей формы; поэтому также и эта функция допускает разложение на действительные простые или двойные множители. Таким образом, если оставалось какое-либо сомнение насчет подобного разложения всех целых функций, то теперь оно совершенно устранено.

155. Это разложение на множители может быть распространено также и на бесконечные ряды. Действительно, так как выше мы видели, что

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ и т. д.} = e^x,$$

причем

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i,$$

где i означает бесконечно большое число; ясно, что ряд

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.}$$

имеет бесконечное число простых, равных между собою множителей, именно, $1 + \frac{x}{i}$. Если от этого ряда отнять первый член, то получится

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ и т. д.} = e^x - 1 = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 1;$$

сравнивая это выражение с § 151, полагая

$$a = 1 + \frac{x}{i}, \quad n = i \quad \text{и} \quad z = 1,$$

видим, что любой его множитель будет равен

$$\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k}{i}\pi + 1;$$

отсюда можно при подстановке вместо $2k$ всех четных чисел получать все множители. Но при $2k = 0$ получается квадратный множитель $\frac{x^2}{i^2}$;

вместо которого — по указанным соображениям — надо взять корень $\frac{x}{i}$; значит, x будет множителем выражения e^x-1, как это, впрочем, ясно само по себе. Для нахождения остальных множителей следует заметить, что так как дуга $\frac{2k}{i}\pi$ бесконечно мала, то

$$\cos\frac{2k}{i}\pi=1-\frac{2k^2}{i^2}\pi^2$$

(§ 134), при обращении в нуль остальных членов вследствие бесконечности числа i. Отсюда любой множитель будет иметь вид

$$\frac{x^2}{i^2}+\frac{4k^2}{i^2}\pi^2+\frac{4k^2\pi^2}{i^3}x,$$

и, стало быть, выражение e^x-1 будет делиться на

$$1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4k^2\pi^2}.$$

Вследствие этого выражение

$$e^x-1=x\left(1+\frac{x}{1\cdot2}+\frac{x^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\text{ и т. д.}\right),$$

кроме множителя x, будет иметь бесконечное число множителей:

$$\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{i}+\frac{x^2}{64\pi^2}\right)\text{ и т. д.}$$

156. Эти множители содержат бесконечно малую часть $\frac{x}{i}$; она входит в отдельные множители и при перемножении их всех $\left(\text{числом }\frac{1}{2}i\right)$ производит член $\frac{x}{2}$; поэтому она опущена быть не может. Во избежание этого неудобства рассмотрим выражение

$$e^x-e^{-x}=\left(1+\frac{x}{i}\right)^i-\left(1-\frac{x}{i}\right)^i=2\left(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\text{ и т. д.}\right),$$

ибо

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\text{ и т. д.}$$

Сравнение этого выражения с § 151 дает

$$n=i,\quad a=1+\frac{x}{i}\quad\text{и}\quad z=1-\frac{x}{i};$$

отсюда множитель этого выражения будет равен

$$a^2-2az\cos\frac{2k}{n}\pi+z^2=2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k}{i}\pi=\frac{4x^2}{i^2}+\frac{4k^2}{i^2}\pi^2-\frac{4k^2\pi^2x^2}{i^4},$$

так как

$$\cos\frac{2k}{i}\pi=1-\frac{2k^2}{i^2}\pi^2.$$

Итак, функция e^x-e^{-x} будет делиться на

$$1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{i^2},$$

где член $\frac{x^2}{i^2}$ может быть опущен без опасения, потому что даже после умножения на i он останется бесконечно малым. Кроме того, как и раньше, если $k=0$, то первый множитель будет равен x. Вследствие этого, после расположения этих множителей по порядку, будет

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\text{и т. д.}=$$
$$=x\left(1+\frac{x^2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\text{ и т. д.}\right).$$

Очевидно, отдельным множителям, путем умножения на соответствующее постоянное, я придал такой вид, чтобы при фактическом умножении получился первый член x [33].

157. Подобным образом, так как

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\text{ и т. д.}=\frac{\left(1+\frac{x}{i}\right)^i+\left(1-\frac{x}{i}\right)^i}{2},$$

то сравнение этого выражения с указанным выше a^n+z^n даст

$$a=1+\frac{x}{i},\quad z=1-\frac{x}{i}\quad\text{и}\quad n=i;$$

значит, любой множитель будет равен

$$a^2-2az\cos\frac{2k+1}{n}\pi+z^2=2+\frac{2x^2}{i^2}-2\left(1-\frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2k+1}{i}\pi.$$

Но

$$\cos\frac{2k+1}{i}\pi=1-\frac{(2k+1)^2}{2i^2}\pi^2,$$

откуда получаем множитель в виде

$$\frac{4x^2}{i^2}+\frac{(2k+1)^2}{i^2}\pi^2,$$

потому что исчезает член со знаменателем i^4. А так как всякий множитель выражения

$$1+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\text{ и т. д.}$$

должен иметь вид $1+\alpha x^2$, то для приведения найденного множителя к этому виду его надо разделить на $\frac{(2k+1)^2\pi^2}{i^2}$; итак, множитель данного выражения будет равен

$$1+\frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2};$$

отсюда найдутся все бесчисленные множители, если вместо $2k+1$ будем подставлять последовательно все нечетные числа. Поэтому

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\text{ и т. д. }=$$
$$=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\text{ и т. д.}$$

158. Если x будет количеством мнимым, то эти показательные выражения перейдут в синус и косинус некоторой действительной дуги.

Действительно, пусть $x = z\sqrt{-1}$; тогда

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin z = z - \frac{z^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{z^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{z^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \text{ и т. д.};$$

это выражение разлагается на такое бесконечное число множителей:

$$z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{16\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{25\pi^2}\right) \text{ и т. д.},$$

т. е. получаем

$$\sin z =$$
$$= z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\pi}\right) \text{ и т. д.}$$

Всякий раз, когда дуга z выбрана так, что какой-либо множитель исчезает, что бывает при $z = 0$, $z = \pm\pi$, $z = \pm 2\pi$ и вообще при $z = \pm k\pi$, если k означает любое целое число, то вместе с тем синус этой дуги должен быть равен нулю; это настолько очевидно, что отсюда a posteriori можно было бы получить сами множители.

Подобным образом, так как

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = \cos z,$$

получаем также

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{49\pi^2}\right) \text{ и т. д.}$$

или, разлагая каждый множитель на два,

$$\cos z =$$
$$= \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi}\right) \text{ и т. д.};$$

отсюда, равным образом, видно, что если $z = \pm\frac{2k+1}{2}\pi$, то будет $z = 0$, что также ясно из природы круга.

159. По § 153 можно также найти множители выражения

$$e^x - 2\cos g + e^{-x} = 2\left(1 - \cos g + \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \text{ и т. д.}\right).$$

Это выражение переходит в такое:

$$\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 2\cos g + \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i;$$

сравнение его с приведенным выше видом дает

$$2n = i, \quad a = 1 + \frac{x}{i} \quad \text{и} \quad z = 1 - \frac{x}{i},$$

откуда любой множитель этого выражения будет равен

$$a^2 - 2az\cos\frac{2k\pi \pm g}{n} + z^2 = 2 + \frac{2x^2}{i^2} - 2\left(1 - \frac{x^2}{i^2}\right)\cos\frac{2(2k\pi \pm g)}{i}.$$

Но

$$\cos\frac{2(2k\pi \pm g)}{i} = 1 - \frac{2(2k\pi \pm g)^2}{i^2},$$

откуда множитель будет равен $\frac{4x^2}{i^2}+\frac{4(2k\pi\pm g)^2}{i^2}$ или же, в другом виде.

$$1+\frac{x}{(2k\pi\pm g)^2}\,.$$

Итак, если разделить заданное выражение на $2(1-\cos g)$, чтобы в бесконечном ряде постоянный член был равен единице, то, взяв все множители, получим

$$\frac{e^x-2\cos g+e^{-x}}{2(1-\cos g)}=$$

$$=\left(1+\frac{x^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(4\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(4\pi+g)^2}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{x^2}{(6\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(6\pi+g)^2}\right)\text{ и т. д.}$$

Если вместо x подставить $z\sqrt{-1}$, то получится

$$\frac{\cos z-\cos g}{1-\cos g}=$$

$$=\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1+\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi+g}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{z}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi-g}\right)\text{ и т. д.}=$$
$$=1-\frac{z^2}{1\cdot2(1-\cos g)}+\frac{z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4(1-\cos g)}-\frac{z^6}{1\cdot2\ldots6(1-\cos g)}+\text{ и т. д.}$$

Таким образом, все множители этого бесконечного ряда известны.

160. Для функции вида

$$e^{b+x}\pm e^{c-x}$$

также удобно могут быть найдены и указаны все множители. Преобразуем ее к виду

$$\left(1+\frac{b+x}{i}\right)^i\pm\left(1+\frac{c-x}{i}\right)^i$$

и, сравнивая его с выражением

$$x^i\pm z^i,$$

находим, что она будет иметь множитель

$$a^2-2az\cos\frac{m\pi}{i}+z^2,$$

где m означает нечетное число при верхнем знаке и четное — при нижнем. Так как, в силу того, что i бесконечно велико,

$$\cos\frac{m\pi}{i}=1-\frac{m^2\pi^2}{2i^2}\,,$$

то этот общий множитель будет равен

$$(a-z)^2+\frac{m^2\pi^2}{i^2}az.$$

В этом случае

$$a=1+\frac{b+x}{i}\text{ и }z=1+\frac{c-x}{i}\,,$$

откуда

$$(a-z)^2=\frac{(b-c+2x)^2}{i^2} \text{ и } az=1+\frac{b+c}{i}+\frac{bc+(c-b)\,x-x^2}{i^2};$$

таким образом, множитель, помноженный на i^2, будет равен

$$(b-c)^2+4(b-c)\,x+4x^2+m^2\pi^2,$$

если пренебречь членами, деленными на i или i^2, так как по сравнению с остальными они исчезают. Если постоянный член путем деления привести к единице, то множитель будет равен

$$1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{m^2\pi^2+(b-c)^2}.$$

161. Так как теперь во всех множителях постоянный член равен единице, то функцию $e^{b+x}\pm e^{c-x}$ надо разделить на такое постоянное, чтобы постоянный член стал равен единице или чтобы ее значение при $x=0$ стало равно единице; таким делителем будет $e^b\pm e^c$, и благодаря этому выражение

$$\frac{e^{b+x}\pm e^{c-x}}{e^b\pm e^c}$$

может быть представлено в виде произведения бесконечного числа множителей. Итак, если взять верхний знак и m будет означать нечетное число, то

$$\frac{e^{b+x}+e^{c-x}}{e^b+e^c}=\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{9\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{25\pi^2+(b-c)^2}\right) \text{и т. д.};$$

если же взять нижний знак и m будет означать число четное, а в случае $m=0$ взять корень из квадратного множителя, то

$$\frac{e^{b+x}-e^{c-x}}{e^b-e^c}=$$

$$=\left(1+\frac{2x}{b-c}\right)\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{4\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{16\pi^2+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)\,x+4x^2}{36\pi^2+(b-c)^2}\right)$$

и т. д.

162. Положим $b=0$, что может быть сделано без ущерба для общности; тогда

$$\frac{e^x+e^ce^{-x}}{1+e^c}=\left(1-\frac{4cx-4x^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{25\pi^2+c^2}\right) \text{ и т. д.};$$

$$\frac{e^x-e^ce^{-x}}{1-e^c}=\left(1-\frac{2x}{c}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{4cx-4x^2}{36\pi^2+c^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Теперь будем считать c отрицательным; тогда получатся такие два равенства:

$$\frac{e^x+e^{-c}e^{-x}}{1+e^{-c}}=\left(1+\frac{4cx+4x^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{25\pi^2+c^2}\right) \text{ и т. д.};$$

$$\frac{e^x-e^{-c}e^{-x}}{1-e^{-c}}=\left(1+\frac{2x}{c}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{4cx+4x^2}{36\pi^2+c^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Помножив первую формулу на третью, получим

$$\frac{e^{2x}+e^{-2x}+e^c+e^{-c}}{2+e^c+e^{-c}};$$

подставляя y вместо $2x$, будем иметь

$$\frac{e^y+e^{-y}+e^c+e^{-c}}{2+e^c+e^{-c}}=\left(1-\frac{2cy-y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{2cy-y^2}{25\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{25\pi^2+c^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Помножив первую формулу на четвертую, получим произведение, равное

$$\frac{e^{2x}-e^{-2x}+e^c-e^{-c}}{e^c-e^{-c}};$$

подставляя y вместо $2x$, будем иметь

$$\frac{e^y-e^{-y}+e^c-e^{-c}}{e^c-e^{-c}}=\left(1+\frac{y}{c}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{2cy+y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{25\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{36\pi^2+c^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Если помножить вторую формулу на третью [34], то получится то же равенство, если только c взять отрицательным; именно, будет

$$\frac{e^c-e^{-c}-e^y+e^{-y}}{e^c-e^{-c}}=\left(1-\frac{y}{c}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{9\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{2cy-y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{25\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{36\pi^2+c^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Помножим, наконец, вторую формулу на четвертую, получим

$$\frac{e^y+e^{-y}-e^c-e^{-c}}{2-e^c-e^{-c}}=\left(1-\frac{y^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{4\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{2cy+y^2}{16\pi^2+c^2}\right)\left(1-\frac{2cy-y^2}{36\pi^2+c^2}\right)\left(1+\frac{2cy+y^2}{36\pi^2+c^2}\right) \text{ и т. д.}$$

163. Эти четыре комбинации можно теперь удобно применить к кругу, положив

$$c=g\sqrt{-1} \text{ и } y=v\sqrt{-1}.$$

Тогда будет

$$e^{v\sqrt{-1}}+e^{-v\sqrt{-1}}=2\cos v,\quad e^{v\sqrt{-1}}-e^{-v\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\cdot\sin v$$

и

$$e^{g\sqrt{-1}}+e^{-g\sqrt{-1}}=2\cos g,\quad e^{g\sqrt{-1}}-e^{-g\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\cdot\sin g.$$

Отсюда первая комбинация даст

$$\frac{\cos v+\cos g}{1+\cos g}=1-\frac{v^2}{1\cdot 2\,(1+\cos g)}+\frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,(1+\cos g)}-\frac{v^6}{1\cdot 2\,\ldots\,6\,(1+\cos g)}+\text{и т. д.}=$$
$$=\left(1+\frac{2gv-v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{2gv-v^2}{25\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{25\pi^2-g^2}\right) \text{ и т. д.}=$$
$$=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right) \text{ и т. д.}=$$
$$=\left(1-\frac{v^2}{(\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(3\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(3\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(5\pi-g)^2}\right)$$
и т. д.

Четвертая же комбинация дает

$$\frac{\cos v - \cos g}{1-\cos g} = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2\,(1-\cos g)} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,(1-\cos g)} - \frac{v^6}{1\cdot 2 \ldots 6\,(1-\cos g)} + \text{и т. д.} =$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{16\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{16\pi^2-g^2}\right) \text{ и т. д.} =$$

$$= \left(1-\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right) \text{ и т. д.} =$$

$$= \left(1-\frac{v^2}{g^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(4\pi-g)^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{(4\pi+g)^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Вторая комбинация дает

$$\frac{\sin g + \sin v}{\sin g} = 1 + \frac{v}{\sin g} - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \sin g} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \sin g} - \text{и т. д.} =$$

$$= \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{2gv-v^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1-\frac{2gv+v^2}{16\pi^2-g^2}\right) \text{и т. д.} =$$

$$= \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right) \text{ и т. д.}$$

При v отрицательном получится третья комбинация.

164. Также и выражения, приведенные в начале § 162, могут быть применены к дугам круга следующим образом. Так как

$$\frac{e^x + e^c e^{-x}}{1+e^c} = \frac{(1+e^{-c})(e^x+e^c e^{-x})}{2+e^c+e^{-c}} = \frac{e^x+e^{-x}+e^{c-x}+e^{-c+x}}{2+e^c+e^{-c}},$$

то если положить

$$c = g\sqrt{-1} \text{ и } x = z\sqrt{-1},$$

это выражение перейдет в

$$\frac{\cos z + \cos(g-z)}{1+\cos g} = \cos z + \frac{\sin g \sin z}{1+\cos g}.$$

Так как $\frac{\sin g}{1+\cos g} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}g$, то будем иметь

$$\cos z + \operatorname{tg}\frac{1}{2}g \sin z =$$

$$= 1 + \frac{z}{1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}g - \frac{z^2}{1\cdot 2} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}g + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\operatorname{tg}\frac{1}{2}g - \text{и т. д.} =$$

$$= \left(1+\frac{4gz-z^2}{\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{9\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{25\pi^2-g^2}\right) \text{ и т. д.} =$$

$$= \left(1+\frac{2z}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{3\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{5\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{5\pi+g}\right)$$
и т. д.

Подобным образом второе выражение при умножении числителя и знаменателя на $1-e^{-c}$ переходит в

$$\frac{e^x+e^{-x}-e^{c-x}-e^{-c+x}}{2-e^c-e^{-c}};$$

полагая здесь $c=g\sqrt{-1}$ и $x=z\sqrt{-1}$, получаем

$$\frac{\cos z-\cos(g-z)}{1-\cos g}=\cos z-\frac{\sin g\sin z}{1-\cos g}=\cos z-\frac{\sin z}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}g}.$$

Таким образом,

$$\cos z-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}g\sin z=$$

$$=1-\frac{z}{1}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}g-\frac{z^2}{1\cdot2}+\frac{z^3}{1\cdot2\cdot3}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}g+\frac{z^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{z^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\operatorname{ctg}\frac{1}{2}g+\text{и т. д.}=$$

$$=\left(1-\frac{2z}{g}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{4\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{16\pi^2-g^2}\right)\left(1+\frac{4gz-4z^2}{36\pi^2-g^2}\right)\text{ и т. д.}=$$

$$=\left(1-\frac{2z}{g}\right)\left(1+\frac{2z}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{4\pi+g}\right)\text{ и т. д.}$$

Если же положить $v=2z$ или $z=\frac{1}{2}v$, то получится

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(g-v)}{\cos\frac{1}{2}g}=\cos\frac{1}{2}v+\operatorname{tg}\frac{1}{2}g\sin\frac{1}{2}v=$$

$$=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\text{ и т. д.},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(g+v)}{\cos\frac{1}{2}g}=\cos\frac{1}{2}v-\operatorname{tg}\frac{1}{2}g\sin\frac{1}{2}v=$$

$$=\left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right)\text{ и т. д.},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(g-v)}{\sin\frac{1}{2}g}=\cos\frac{1}{2}v-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}g\sin\frac{1}{2}v=$$

$$=\left(1-\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right)\text{ и т. д.},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(g+v)}{\sin\frac{1}{2}g}=\cos\frac{1}{2}v+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}g\sin\frac{1}{2}v=$$

$$=\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)\text{ и т. д.}$$

Закон последовательного образования этих множителей прост и единообразен, причем из этих выражений путем умножения получаются выражения, найденные в предыдущем параграфе.

ГЛАВА X

О ПРИМЕНЕНИИ НАЙДЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СУММ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

165. Если

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{и т. д.}=(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z) \text{ и т. д.},$$

то при действительном перемножении этих множителей, конечно ли, или бесконечно их число, они должны дать выражение $1+Az+Bz^2+Cz^3+$ $+Dz^4+$ и т. д. Стало быть, коэффициент A суммы будет равен сумме всех количеств

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{и т. д.}$$

Коэффициент же B будет равен сумме произведений по два, так что

$$B=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\text{и т. д.}$$

Коэффициент C будет равен сумме произведений по три, именно,

$$C=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta+\text{и т. д.}$$

Так же и дальше D будет равно сумме произведений по четыре, E будет равно сумме произведений по пяти и т. д., как это известно из обычной алгебры.

166. Так как сумма количеств $\alpha+\beta+\gamma+\delta+$ и т. д. дается вместе с суммой произведений по два, то отсюда можно найти сумму квадратов $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+$ и т. д., так как она равна квадрату суммы минус удвоенная сумма произведений по два. Подобным образом можно определить сумму кубов, четвертых и более высоких степеней; а именно, если положим

$$P=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{и т. д.},$$

$$Q=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2+\text{и т. д.},$$

$$R=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\varepsilon^3+\text{и т. д.},$$

$$S=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+\varepsilon^4+\text{и т. д.},$$

$$T=\alpha^5+\beta^5+\gamma^5+\delta^5+\varepsilon^5+\text{и т. д.},$$

$$V=\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+\delta^6+\varepsilon^6+\text{и т. д.},$$

и т. д.,

то значения P, Q, R, S, T, V и т. д. определятся по данным A, B,

C, D и т. д. следующим образом:

$$P = A,$$
$$Q = AP - 2B,$$
$$R = AQ - BP + 3C,$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D,$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E,$$
$$V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F$$

и т. д.

Справедливость этих формул легко узнается путем проверки; с полной же строгостью они будут выведены в интегральном исчислении [35].

167. Так как выше (§ 156) мы нашли, что

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\ldots 7} + \text{и т. д.}\right) =$$
$$= x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{25\pi^2}\right) \text{ и т. д.,}$$

то

$$1 + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7} + \text{и т. д.} =$$
$$= \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{25\pi^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Положим $x^2 = \pi^2 z$; тогда

$$1 + \frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 3} z + \frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} z^2 + \frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7} z^3 + \text{и т. д.} =$$
$$= (1 + z)\left(1 + \frac{1}{4}z\right)\left(1 + \frac{1}{9}z\right)\left(1 + \frac{1}{16}z\right)\left(1 + \frac{1}{25}z\right) \text{ и т. д.}$$

Применяя выведенное выше правило к этому случаю, будем иметь

$$A = \frac{\pi^2}{6}, \quad B = \frac{\pi^4}{120}, \quad C = \frac{\pi^6}{5040}, \quad D = \frac{\pi^8}{362880} \text{ и т. д.}$$

Поэтому, если положим

$$P = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{и т. д.,}$$
$$Q = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \text{и т. д.,}$$
$$R = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \text{и т. д.,}$$
$$S = 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \text{и т. д.,}$$
$$T = 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \text{и т. д.,}$$

и т. д.

и значения этих букв определим при помощи их выражений через A,

B, C, D и т. д., то получится [36]

$$P=\frac{\pi^2}{6},\quad Q=\frac{\pi^4}{90},\quad R=\frac{\pi^6}{945},\quad S=\frac{\pi^8}{9\,450},\quad T=\frac{\pi^{10}}{93\,555}\quad \text{и т. д.}$$

168. Таким образом, ясно, что суммы всех бесконечных рядов, заключающихся в общей форме

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{и т. д.},$$

могут быть выражены посредством длины полуокружности π всякий раз, когда n будет числом четным; при этом сумма будет находиться в рациональном отношении к π^n. Чтобы представить значение этих сумм более ясно, приведу здесь некоторые из них, выраженные более удобным образом:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{и т. д.}=\frac{2^0}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2,$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\text{и т. д.}=\frac{2^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4,$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{и т. д.}=\frac{2^4}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6,$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\text{и т. д.}=\frac{2^6}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8,$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\text{и т. д.}=\frac{2^8}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10},$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{10}}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12},$$

$$1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{12}}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14},$$

$$1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{14}}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16},$$

$$1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{16}}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,19}\cdot\frac{43\,867}{21}\pi^{18},$$

$$1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{18}}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,21}\cdot\frac{1\,222\,227}{55}\pi^{20},$$

$$1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{20}}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,23}\cdot\frac{854\,513}{3}\pi^{22},$$

$$1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{22}}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,25}\cdot\frac{1\,181\,820\,455}{273}\pi^{24},$$

$$1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\text{и т. д.}=\frac{2^{24}}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,27}\cdot\frac{76\,977\,927}{1}\pi^{26}.$$

Коэффициенты [1]) [37] степеней π можно было так далеко продолжить благодаря способу, который должен быть изложен в другом месте; я здесь привел их потому, что на первый взгляд весьма нерегулярный

[1]) В оригинале exponentes — показатели. [*С. Л.*]

ряд дробей $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{691}{105}, \frac{35}{1}$ и т. д. имеет большое количество применений.

169. Разберем этим же способом уравнение, найденное в § 157, именно:

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\text{и т. д.}=$$

$$=\left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\text{ и т. д.}$$

Если положить $x^2=\frac{\pi^2 z}{4}$, то будет

$$1+\frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 4}z+\frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^2}z^2+\frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6\cdot 4^3}z^3+\text{и т. д.}=$$

$$=(1+z)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{25}z\right)\left(1+\frac{1}{49}z\right)\text{ и т. д.}$$

Отсюда, применяя выведенное выше, получим

$$A=\frac{\pi^2}{1\cdot 2\cdot 4},\quad B=\frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^2},\quad C=\frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 6\cdot 4^3}\text{ и т. д.}$$

Если же положим

$$P=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\text{и т. д.},$$

$$Q=1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{81^2}+\text{и т. д.},$$

$$R=1+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{49^3}+\frac{1}{81^3}+\text{и т. д.},$$

$$S=1+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\frac{1}{81^4}+\text{и т. д.},$$

и т. д.,

то для P, Q, R, S и т. д. найдутся следующие значения:

$$P=\frac{1}{1}\cdot\frac{\pi^2}{2^3},\qquad Q=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\pi^4}{2^5},$$

$$R=\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{\pi^6}{2^7},\qquad S=\frac{272}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 7}\cdot\frac{\pi^8}{2^9},$$

$$T=\frac{7\,936}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 9}\cdot\frac{\pi^{10}}{2^{11}},\qquad V=\frac{353\,792}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 11}\cdot\frac{\pi^{12}}{2^{13}},$$

$$W=\frac{22\,368\,256}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 13}\cdot\frac{\pi^{14}}{2^{15}}\qquad\text{и т. д.}$$

170. Те же суммы степеней нечетных чисел могут быть найдены из предыдущих сумм, в которых встречаются все числа; так, если

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{и т. д.},$$

то после умножения на $\frac{1}{2^n}$ будет

$$\frac{M}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\text{и т. д.};$$

если этот ряд, содержащий только четные числа, вычесть из предыдущего, то останутся нечетные числа, и будет

$$M-\frac{M}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}M=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\text{и т. д.}$$

Если же вычесть из M удвоенный ряд $\frac{M}{2^n}$, то получатся перемежающиеся знаки, и будет

$$M-\frac{2M}{2^n}=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}M=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\text{и т. д.}$$

На основании указанных правил могут быть суммированы такие ряды:

$$1\pm\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\pm\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}\pm\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}\pm\text{ и т. д.},$$

$$1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{11^n}+\text{и т. д.},$$

если только n будет числом четным; сумма будет равна $A\pi^n$, где A — рациональное число.

171. Кроме того, выражения § 164 также дадут ряды, достойные упоминания. Так как

$$\cos\frac{1}{2}v+\operatorname{tg}\frac{1}{2}g\cdot\sin\frac{1}{2}v=$$
$$=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\text{ и т. д.},$$

то при $v=\frac{x}{n}\pi$ и $g=\frac{m}{n}\pi$ будет

$$\left(1+\frac{x}{n-m}\right)\left(1-\frac{x}{n+m}\right)\left(1+\frac{x}{3n-m}\right)\left(1-\frac{x}{3n+m}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{x}{5n-m}\right)\left(1-\frac{x}{5n+m}\right)\text{ и т. д.}=\cos\frac{x\pi}{2n}+\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}\sin\frac{x\pi}{2n}=$$
$$=1+\frac{\pi x}{2n}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}-\frac{\pi^2x^2}{2\cdot4n^2}-\frac{\pi^3x^3}{2\cdot4\cdot6n^3}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}+\frac{\pi^4x^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8n^4}+\text{и т. д.}$$

Это бесконечное выражение по сопоставлении с § 165 даст такие значения:

$$A=\frac{\pi}{2n}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n},$$
$$B=\frac{-\pi^2}{2\cdot4n^2},$$
$$C=\frac{-\pi^3}{2\cdot4\cdot6n^3}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n},$$
$$D=\frac{\pi^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8n^4},$$
$$E=\frac{\pi^5}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10n^5}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}$$

и т. д.

Но в этом случае

$$\alpha=\frac{1}{n-m},\quad \beta=-\frac{1}{n+m},\quad \gamma=\frac{1}{3n-m},\quad \delta=-\frac{1}{3n+m},$$
$$\varepsilon=\frac{1}{5n-m},\quad \zeta=\frac{1}{5n+m}\text{ и т. д.}$$

172. Отсюда по правилу § 166 получаются следующие ряды:

$$P=\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}+\frac{1}{5n-m}-\text{и т. д.},$$

$$Q=\frac{1}{(n-m)^2}+\frac{1}{(n+m)^2}+\frac{1}{(3n-m)^2}+\frac{1}{(3n+m)^2}+\frac{1}{(5n-m)^2}+\text{и т. д.},$$

$$R=\frac{1}{(n-m)^3}-\frac{1}{(n+m)^3}+\frac{1}{(3n-m)^3}-\frac{1}{(3n+m)^3}+\frac{1}{(5n-m)^3}-\text{и т. д.},$$

$$S=\frac{1}{(n-m)^4}+\frac{1}{(n+m)^4}+\frac{1}{(3n-m)^4}+\frac{1}{(3n+m)^4}+\frac{1}{(5n-m)^4}+\text{и т. д.},$$

$$T=\frac{1}{(n-m)^5}-\frac{1}{(n+m)^5}+\frac{1}{(3n-m)^5}-\frac{1}{(3n+m)^5}+\frac{1}{(5n-m)^5}-\text{и т. д.},$$

$$V=\frac{1}{(n-m)^6}+\frac{1}{(n+m)^6}+\frac{1}{(3n-m)^6}+\frac{1}{(3n+m)^6}+\frac{1}{(5n-m)^6}+\text{и т. д.}$$

и т. д.

Если подставить $\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=k$, то, как мы показали, будет

$$P=A=\frac{k\pi}{2n} \qquad =\frac{k\pi}{2n},$$

$$Q=\frac{(k^2+1)\,\pi^2}{4n^2} \qquad =\frac{(2k^2+2)\,\pi^2}{2\cdot 4n^2},$$

$$R=\frac{(k^3+k)\,\pi^3}{8n^3} \qquad =\frac{(6k^3+6k)\,\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3},$$

$$S=\frac{(3k^4+4k^2+1)\,\pi^4}{48n^4}=\frac{(24k^4+32k^2+8)\,\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4},$$

$$T=\frac{(3k^5+5k^3+2k)\,\pi^5}{96n^5}=\frac{(120k^5+200k^3+80k)\,\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5}$$

и т. д.

173. Равным образом последнее выражение § 164:

$$\cos\frac{1}{2}v+\operatorname{ctg}\frac{1}{2}g\cdot\sin\frac{1}{2}v=$$

$$=\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)\text{ и т. д.},$$

если подставим $v=\frac{x}{n}\pi$, $g=\frac{m}{n}\pi$ и $\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=k$, так что $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}g=\frac{1}{k}$, даст

$$\cos\frac{x\pi}{2n}+\frac{1}{k}\sin\frac{x\pi}{2n}=$$

$$=1+\frac{\pi x}{2nk}-\frac{\pi^2x^2}{2\cdot 4n^2}-\frac{\pi^3x^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3k}+\frac{\pi^4x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4}+\frac{\pi^5n^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5k}-\text{и т. д.}=$$

$$=\left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{2n-m}\right)\left(1+\frac{x}{2n+m}\right)\left(1-\frac{x}{4n-m}\right)\left(1+\frac{x}{4n+m}\right)\text{ и т. д.}$$

При сравнении с общей формулой (§ 165) получится

$$A=\frac{\pi}{2nk},\quad B=\frac{-\pi^2}{2\cdot 4n^2},\quad C=\frac{-\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3k},$$

$$D=\frac{\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4},\quad E=\frac{\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5k}\text{ и т. д.}$$

Из множителей же получим

$$\alpha=\frac{1}{m},\quad \beta=\frac{-1}{2n-m},\quad \gamma=\frac{1}{2n+m},\quad \delta=\frac{-1}{4n-m},\quad \varepsilon=\frac{1}{4n+m}\text{ и т. д.}$$

174. Отсюда, согласно § 166, образуются следующие ряды и для каждого находится соответствующая сумма:

$$P=\frac{1}{m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}-\text{и т. д.},$$

$$Q=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(2n-m)^2}+\frac{1}{(2n+m)^2}+\frac{1}{(4n-m)^2}+\frac{1}{(4n+m)^2}+\text{и т. д.},$$

$$R=\frac{1}{m^3}-\frac{1}{(2n-m)^3}+\frac{1}{(2n+m)^3}-\frac{1}{(4n-m)^3}+\frac{1}{(4n+m)^3}-\text{и т. д.},$$

$$S=\frac{1}{m^4}+\frac{1}{(2n-m)^4}+\frac{1}{(2n+m)^4}+\frac{1}{(4n-m)^4}+\frac{1}{(4n+m)^4}+\text{и т. д.},$$

$$T=\frac{1}{m^5}-\frac{1}{(2n-m)^5}+\frac{1}{(2n+m)^5}-\frac{1}{(4n-m)^5}+\frac{1}{(4n+m)^5}-\text{и т. д.}$$

Суммы же этих рядов P, Q, R, S и т. д. будут таковы:

$$P=A=\frac{\pi}{2nk}=\frac{1\pi}{2nk},$$

$$Q=\frac{(k^2+1)\pi^2}{4n^2k^2}=\frac{(2+2k^2)\pi^2}{2\cdot 4n^2k^2},$$

$$R=\frac{(k^2+1)\pi^3}{8n^3k^3}=\frac{(6+6k^2)\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3k^3},$$

$$S=\frac{(k^4+4k^2+3)\pi^4}{48n^4k^4}=\frac{(24+32k^2+8k^4)\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4k^4},$$

$$T=\frac{(2k^4+5k^2+3)\pi^5}{96n^5k^5}=\frac{(120+200k^2+80k^4)\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5k^5},$$

$$V=\frac{(2k^6+17k^4+30k^2+15)\pi^6}{960n^6k^6}=\frac{(720+1440k^2+816k^4+90k^6)\pi^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12n^6k^6}$$

и т. д.

175. Эти общие ряды заслуживают того, чтобы вывести некоторые частные случаи, получающиеся, если придать отношению m к n определенные числовые значения. Пусть, прежде всего, $m=1$ и $n=2$; тогда $k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\operatorname{tg}45^\circ=1$ и оба класса рядов совпадут. Получим

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi^4}{96}=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{5\pi^5}{1\,536}=1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}-\text{и т. д.};$$

$$\frac{\pi^6}{960}=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{и т. д.},$$

и т. д.

Первый из этих рядов мы уже вывели выше (§ 140); те из остальных, которые содержат четные степени, были получены раньше (§ 169); прочие же, у которых показатели являются числами нечетными, встречаются здесь впервые. Итак, мы установили, что и суммы всех следующих рядов:

$$1-\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{1}{5^{2n+1}}-\frac{1}{7^{2n+1}}+\frac{1}{9^{2n+1}}-\text{и т. д.}$$

могут быть выражены посредством π.

176. Если теперь

$$m=1, \quad n=3,$$

то

$$k=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

тогда ряды § 172 перейдут в такие:

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi^2}{27}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{16^2}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi^3}{162\sqrt{3}}=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{8^3}-\frac{1}{10^3}+\frac{1}{14^3}-\frac{1}{16^3}+\text{и т. д.},$$

и т. д.,

т. е.

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{4\pi^2}{27}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}}=1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{8^3}+\text{и т. д.},$$

и т. д.

В этих рядах недостает всех чисел, делящихся на три; те из них, которые имеют четное измерение, могут быть выведены из найденных выше еще следующим образом. Так как

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\text{и т. д.},$$

то

$$\frac{\pi^2}{6\cdot 9}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{12^2}+\text{и т. д.}=\frac{\pi^2}{54}.$$

Если последний ряд, содержащий все числа, делящиеся на три, вычесть из первого, то останутся все числа, не делящиеся на три, так что будет

$$\frac{8\pi^2}{54}=\frac{4\pi^2}{27}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{и т. д.},$$

как мы уже нашли.

177. Та же подстановка

$$m=1, \quad n=3 \quad \text{и} \quad k=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

в применении к § 174 дает такие суммы:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{17^2}+\frac{1}{19^2}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}}=1-\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}-\frac{1}{11^3}+\frac{1}{13^3}-\frac{1}{17^3}+\frac{1}{19^3}-\text{и т. д.},$$

и т. д.,

в знаменателях которых встречаются только нечетные числа, за исключением тех, которые делятся на три. Впрочем, ряды, имеющие четное измерение, могут быть выведены из уже найденных; так как

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{и т. д.},$$

то

$$\frac{\pi^2}{8\cdot 9}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{21^2}+\text{и т. д.}=\frac{\pi^2}{72}.$$

Если этот ряд, содержащий нечетные числа, делящиеся на три, вычесть из первого, то останется ряд квадратов нечетных чисел, не делящихся на три, и будет

$$\frac{\pi^2}{9}=1+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{13^2}+\text{и т. д.}$$

178. Если сложить или вычесть ряды, найденные в § 172 и 174, то получатся другие ряды, достойные внимания. Именно, будет

$$\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2nk}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\text{и т. д.}=\frac{(k^2+1)\pi}{2nk};$$

но

$$k=\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{m\pi}{2n}}\quad\text{и}\quad 1+k^2=\frac{1}{\left(\cos\frac{m\pi}{2n}\right)^2};$$

отсюда

$$\frac{2k}{1+k^2}=2\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\cos\frac{m\pi}{2n}=\sin\frac{m\pi}{n};$$

при подстановке этого значения получим

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}-\text{и т. д.}$$

Подобным образом, вычитая, найдем

$$\frac{\pi}{2nk}-\frac{k\pi}{2n}=\frac{(1-k^2)\pi}{2nk}=$$

$$=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}-\text{и т. д.};$$

но так как

$$\frac{2k}{1-k^2}=\operatorname{tg}2\frac{m\pi}{2n}=\operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}=\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{\cos\frac{m\pi}{n}},$$

то отсюда

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}+\text{и т. д.}$$

Однако получаемые отсюда ряды квадратов и более высоких степеней могут быть более легко выведены из этих же рядов путем дифференцирования.

179. Так как мы уже разобрали случаи, когда $m=1$ и $n=2$ или 3, то положим

$$m=1 \quad \text{и} \quad n=4;$$

тогда

$$\sin\frac{m\pi}{n}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда, следовательно, получится

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\text{и т. д.}$$

и

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\text{и т. д.}$$

При

$$m=1 \quad \text{и} \quad n=8$$

будет

$$\frac{m\pi}{n}=\frac{\pi}{8}, \quad \sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}, \quad \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}, \quad \frac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}=1+\sqrt{2};$$

отсюда получится

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2-\sqrt{2}}}=1+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{23}-\text{и т. д.}$$

и

$$\frac{\pi}{8(-1+\sqrt{2})}=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\text{и т. д.}$$

Пусть теперь

$$m=3 \quad \text{и} \quad n=8,$$

тогда

$$\frac{m\pi}{n}=\frac{3\pi}{8}, \quad \sin\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}, \quad \cos\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}},$$

откуда

$$\frac{\cos\frac{3}{8}}{\sin\frac{3}{8}\pi}=\frac{1}{1+\ \ 2},$$

и получатся такие ряды:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi}{8(1+\sqrt{2})}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}+\text{и т. д.}$$

180. Комбинируя последние ряды, получаем:

$$\frac{\pi\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi\left(-1+\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)}{8}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)}{8}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)}{8}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\text{и т. д.},$$

$$\frac{\pi\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{4-2\sqrt{2}}\right)}{8}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}-\text{и т. д.}$$

Подобным образом можно идти дальше, подставляя $n=16$ и $m=1$, либо 3, либо 5, либо 7; этим путем будут найдены суммы рядов из 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ и т. д., в которых чередование знаков плюс и минус будет следовать другим законам.

181. Если в рядах § 178 соединить по два члена в одну сумму, то получим

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}+\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}+\frac{2m}{9n^2-m^2}-\frac{2m}{16n^2-m^2}+\text{и т. д.},$$

поэтому

$$\frac{1}{n^2-m^2}-\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}-\text{и т. д.}=\frac{\pi}{2mn\sin\frac{m\pi}{n}}-\frac{1}{2m^2}.$$

Другой же ряд даст

$$\frac{\pi}{n\operatorname{tg}\frac{m}{n}\pi}=\frac{1}{m}-\frac{2m}{n^2-m^2}-\frac{2m}{4n^2-m^2}-\frac{2m}{9n^2-m^2}-\text{и т. д.},$$

откуда

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\text{и т. д.}=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn\operatorname{tg}\frac{m}{n}\pi}.$$

От соединения этих рядов получается

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\text{и т. д.}=\frac{\pi\operatorname{tg}\frac{m}{2n}\pi}{4mn}.$$

Если во втором из этих рядов положить $n=1$, а m будет каким-либо четным числом $(=2k)$, то, ввиду того, что $\operatorname{tg}k\pi=0$, всегда, если только k не равно нулю, будет

$$\frac{1}{1-4k^2}+\frac{1}{9-4k^2}+\frac{1}{25-4k^2}+\frac{1}{49-4k^2}+\text{и т. д.}=0.$$

Если же в первом из этих рядов взять $n=2$, а m будет каким-либо нечетным числом $(=2k+1)$, то, ввиду того, что $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{m\pi}{n}}=0$, будет

$$\frac{1}{4-(2k+1)^2}+\frac{1}{16-(2k+1)^2}+\frac{1}{36-(2k+1)^2}+\text{и т. д.}=\frac{1}{2(2k+1)^2}.$$

182. Помножим найденные ряды на n^2, и пусть $\frac{m}{n}=p$; получатся такие выражения:

$$\frac{1}{1-p^2}-\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}-\frac{1}{16-p^2}+\text{и т. д.}=\frac{\pi}{2p\sin p\pi}-\frac{1}{2p^2},$$

$$\frac{1}{1-p^2}+\frac{1}{4-p^2}+\frac{1}{9-p^2}+\frac{1}{16-p^2}+\text{и т. д.}=\frac{1}{2p^2}-\frac{\pi}{2p\operatorname{tg}p\pi}\ [38].$$

Пусть $p^2=a$; получатся такие ряды:

$$\frac{1}{1-a}-\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}-\frac{1}{16-a}+\text{и т. д.}=\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\sin\pi\sqrt{a}}-\frac{1}{2a},$$

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}+\frac{1}{16-a}+\text{и т. д.}=\frac{1}{2a}-\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\operatorname{tg}\pi\sqrt{a}}.$$

Сумма этих рядов может быть выражена при помощи круга[1]), если только a не будет числом отрицательным или целым квадратом.

183. Мы сможем найти суммы этих рядов и тогда, когда a будет числом отрицательным, посредством указанного выше приведения мнимых показательных количеств к синусу и косинусу круговых дуг. В самом деле, так как

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos x+\sqrt{-1}\cdot\sin x \quad\text{и}\quad e^{-x\sqrt{-1}}=\cos x-\sqrt{-1}\cdot\sin x,$$

то, наоборот, при подстановке $y\sqrt{-1}$ вместо x будет

$$\cos y\sqrt{-1}=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \quad\text{и}\quad \sin y\sqrt{-1}=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2\sqrt{-1}}.$$

Если же $a=-b$ и $y=\pi\sqrt{b}$, то получаем

$$\cos\pi\sqrt{-b}=\frac{e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}}{2}$$

и

$$\sin\pi\sqrt{-b}=\frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{2\sqrt{-1}};$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}\pi\sqrt{-b}=\frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}})\sqrt{-1}};$$

отсюда

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\sin\pi\sqrt{-b}}=\frac{-2\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}$$

[1]) То есть через число π. [*Ред.*]

и

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\operatorname{tg}\pi\sqrt{-b}}=\frac{-(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}})\,\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}.$$

Заметив это, получим

$$\frac{1}{1+b}-\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}-\frac{1}{16+b}+\text{ и т. д.}=\frac{1}{2b}-\frac{\pi\sqrt{b}}{(e^{\pi\sqrt{b}}-e^{-\pi\sqrt{b}})\,b},$$

$$\frac{1}{1+b}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}+\frac{1}{16+b}+\text{ и т. д.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{b}}+e^{-\pi\sqrt{b}})\,\pi\sqrt{b}}{2b\,(e^{\pi\sqrt{b}}-e^{-\pi\sqrt{b}})}-\frac{1}{2b}.$$

Эти ряды можно вывести и из § 162, применяя тот же метод, каким я пользовался в настоящей главе. Но так как приведение синусов и косинусов мнимых дуг к действительным показательным количествам особенно хорошо иллюстрируется этим способом, то я и решил, что это изложение заслуживает предпочтения перед другим.

ГЛАВА XI

О ДРУГИХ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫРАЖЕНИЯХ ДУГ И СИНУСОВ

184. Так как выше (§ 158) мы видели, что при z, означающем какую-либо дугу круга,

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{16\pi^2}\right) \text{ и т. д.}$$

и

$$\cos z = \left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{49\pi^2}\right) \text{ и т. д.,}$$

то при дуге $z=\frac{m\pi}{n}$ будет

$$\sin\frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right) \text{ и т. д.}$$

и

$$\cos\frac{m\pi}{n} = \left(1-\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{9n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{25n^2}\right)\left(1-\frac{4m^2}{49n^2}\right) \text{ и т. д.}$$

Если вместо n подставить $2n$, то получатся такие выражения:

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{4n^2-m^2}{4n^2}\cdot\frac{16n^2-m^2}{16n^2}\cdot\frac{36n^2-m^2}{36n^2}\cdot \text{ и т. д.,}$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{n^2-m^2}{n^2}\cdot\frac{9n^2-m^2}{9n^2}\cdot\frac{25n^2-m^2}{25n^2}\cdot\frac{49n^2-m^2}{49n^2}\cdot \text{ и т. д.}$$

При разложении на простые множители они дают

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{2n+m}{2n}\cdot\frac{4n-m}{4n}\cdot\frac{4n+m}{4n}\cdot\frac{6n-m}{6n}\cdot \text{ и т. д.,}$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\frac{3n+m}{3n}\cdot\frac{5n-m}{5n}\cdot\frac{5n+m}{5n}\cdot \text{ и т. д.}$$

Подставим $n-m$ вместо m; так как

$$\sin\frac{(n-m)\pi}{2n} = \cos\frac{m\pi}{2n} \text{ и } \cos\frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin\frac{m\pi}{2n},$$

то получатся такие выражения:

$$\cos\frac{m\pi}{2n}=\frac{(n-m)\pi}{2n}\cdot\frac{n+m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{2n}\cdot\frac{3n+m}{4n}\cdot\frac{5n-m}{4n}\cdot\frac{5n+m}{6n}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{n}\cdot\frac{2n+m}{3n}\cdot\frac{4n-m}{3n}\cdot\frac{4n+m}{5n}\cdot\frac{6n-m}{5n}\cdot \text{ и т. д.}$$

185. Так как для синуса и косинуса угла $\frac{m\pi}{2n}$ имеются по два выражения, то, составив их отношение, поделив одно на другое, получим

$$1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{8}\cdot \text{ и т. д.}$$

и, следовательно,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12\cdot\text{и т. д.}}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\cdot\text{ и т. д.}};$$

это есть выражение окружности круга, найденное Валлисом в Arithmetica infinitorum [39]. При помощи первого выражения для синуса можно вывести бесчисленные подобные выражения; ведь из него вытекает, что

$$\frac{\pi}{2}=\frac{n}{m}\sin\frac{m\pi}{2n}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdot\frac{6}{6n-m}\cdot \text{ и т. д.}$$

и при $\frac{m}{n}=1$ это дает формулу Валлиса. Если же $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, то, так как $\sin\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, получится

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{16}{17}\cdot \text{ и т. д.}$$

Если $\frac{m}{n}=\frac{1}{3}$, то, так как $\sin\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}$, получится

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdot \text{ и т. д.}$$

Деля выражение Валлиса на выражение, соответствующее $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$, получим

$$\sqrt{2}=\frac{2\cdot2\cdot6\cdot6\cdot10\cdot10\cdot14\cdot14\cdot18\cdot18\cdot\text{ и т. д.}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19\cdot\text{ и т. д.}}.$$

186. Так как тангенс всякого угла равен синусу, деленному на косинус, то и тангенс также может быть выражен при помощи такого рода множителей в бесконечном числе. Если первое выражение для синуса разделить на второе выражение для косинуса, то получим

$$\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{m}{n-m}\cdot\frac{2n-m}{n+m}\cdot\frac{2n+m}{3n-m}\cdot\frac{4n-m}{3n+m}\cdot\frac{4n+m}{5n-m}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n-m}{m}\cdot\frac{n+m}{2n-m}\cdot\frac{3n-m}{2n+m}\cdot\frac{3n+m}{4n-m}\cdot\frac{5n-m}{4n+m}\cdot \text{ и т. д.}$$

Подобным же образом выразятся секансы и косекансы:

$$\sec\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{n-m}\cdot\frac{n}{n+m}\cdot\frac{3n}{3n-m}\cdot\frac{3n}{3n+m}\cdot\frac{5n}{5n-m}\cdot\frac{5n}{5n+m}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{2n-m}\cdot\frac{3n}{2n+m}\cdot\frac{3n}{4n-m}\cdot\frac{5n}{4n+m}\cdot\frac{5n}{6n-m}\cdot \text{ и т. д.}$$

Если сопоставить другие формулы для синусов и косинусов, то получится

$$\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1(n+m)}{2(2n-m)}\cdot\frac{3(3n-m)}{2(2n+m)}\cdot\frac{3(3n+m)}{4(4n-m)}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\sec\frac{m\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdot \text{ и т. д.}$$

187. Если вместо m написать k и подобным же образом определить синус и косинус угла $\frac{k\pi}{2n}$, а затем эти выражения разделить на предыдущие, то получатся такие формулы:

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}=\frac{m}{k}\cdot\frac{2n-m}{2n-k}\cdot\frac{2n+m}{2n+k}\cdot\frac{4n-m}{4n-k}\cdot\frac{4n+m}{4n+k}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\frac{\sin\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{k\pi}{2n}}=\frac{m}{n-k}\cdot\frac{2n-m}{n+k}\cdot\frac{2n+m}{3n-k}\cdot\frac{4n-m}{3n+k}\cdot\frac{4n+m}{5n-k}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\cos\frac{k\pi}{2n}}=\frac{n-m}{n-k}\cdot\frac{n+m}{n+k}\cdot\frac{3n-m}{3n-k}\cdot\frac{3n+m}{3n+k}\cdot\frac{5n-m}{5n-k}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\frac{\cos\frac{m\pi}{2n}}{\sin\frac{k\pi}{2n}}=\frac{n-m}{k}\cdot\frac{n+m}{2n-k}\cdot\frac{3n-m}{2n+k}\cdot\frac{3n+m}{4n-k}\cdot\frac{5n-m}{4n+k}\cdot \text{ и т. д.}$$

Стало быть, если взять вместо $\frac{k\pi}{2n}$ какой-нибудь из углов, синус и косинус которых известны, то можно будет при помощи их определить синус и косинус какого-либо другого угла $\frac{m\pi}{2n}$.

188. Обратно, значения выражений, состоящих из бесконечного количества множителей, могут быть выражены или посредством длины окружности, или при помощи синусов и косинусов данных углов; и это немаловажно, потому что даже теперь не известны другие способы, посредством которых могли бы быть выражены значения таких бесконечных произведений. Впрочем, выражения эти мало полезны для получения приближенных значений как для π, так и для синусов и косинусов углов $\frac{m\pi}{2n}$. Хотя эти множители

$$\frac{\pi}{2}=2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right) \text{ и т. д.}$$ [40]

нетрудно перемножить между собой, представляя их в виде десятичных дробей, однако пришлось бы принять во внимание слишком много членов, если бы мы захотели найти значение π с точностью до десяти только знаков.

189. Главное применение этих, хотя и бесконечных, выражений заключается в нахождении логарифмов; польза множителей в этом деле столь велика, что без них вычисление логарифмов было бы весьма трудным. Прежде всего, так как

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right) \text{ и т. д.},$$

то, логарифмируя, получим

$$l\pi=l4+l\left(1-\frac{1}{9}\right)+l\left(1-\frac{1}{25}\right)+l\left(1-\frac{1}{49}\right)+ \text{ и т. д.}$$

или

$$l\pi=l2-l\left(1-\frac{1}{4}\right)-l\left(1-\frac{1}{16}\right)-l\left(1-\frac{1}{36}\right)-\text{и т. д.},$$

берутся ли логарифмы обыкновенные или гиперболические. Но так как по гиперболическим логарифмам легко находятся обыкновенные, то мы применим указанный замечательный способ к нахождению гиперболического логарифма числа π.

190. Так как при гиперболических логарифмах

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\text{и т. д.},$$

то, развертывая отдельные члены этим способом, получим

$$\begin{aligned} l\pi=l4&-\frac{1}{9}-\frac{1}{2\cdot 9^2}-\frac{1}{3\cdot 9^3}-\frac{1}{4\cdot 9^4}-\text{и т. д.}\\ &-\frac{1}{25}-\frac{1}{2\cdot 25^2}-\frac{1}{3\cdot 25^3}-\frac{1}{4\cdot 25^4}-\text{и т. д.},\\ &-\frac{1}{49}-\frac{1}{2\cdot 49^2}-\frac{1}{3\cdot 49^3}-\frac{1}{4\cdot 49^4}-\text{и т. д.}\\ &\qquad\text{и т. д.}\end{aligned}$$

В этих рядах, число которых бесконечно, по вертикалям получаются те самые ряды, суммы которых мы нашли выше (§ 169 и 170); если для краткости положить

$$A=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{и т. д.},$$

$$B=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{и т. д.},$$

$$C=1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{и т. д.},$$

$$D=1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{ и т. д.},$$

и т. д.,

то

$$l\pi=l4-(A-1)-\frac{1}{2}(B-1)-\frac{1}{3}(C-1)-\frac{1}{4}(D-1)-\text{и т. д.}$$

Приближенные значения найденных выше сумм будут

$$A = 1{,}23370\ 05501\ 36169\ 82735\ 431,$$
$$B = 1{,}01467\ 80316\ 04192\ 05454\ 625,$$
$$C = 1{,}00144\ 70766\ 40942\ 12190\ 647,$$
$$D = 1{,}00015\ 51790\ 25296\ 11930\ 298,$$
$$E = 1{,}00001\ 70413\ 63044\ 82548\ 818,$$
$$F = 1{,}00000\ 18858\ 48583\ 11957\ 590,$$
$$G = 1{,}00000\ 02092\ 40519\ 21150\ 010,$$
$$H = 1{,}00000\ 00232\ 37157\ 37915\ 670,$$
$$I = 1{,}00000\ 00025\ 81437\ 55665\ 977,$$
$$K = 1{,}00000\ 00002\ 86807\ 69745\ 558,$$
$$L = 1{,}00000\ 00000\ 31866\ 77514\ 044,$$
$$M = 1{,}00000\ 00000\ 03540\ 72294\ 392,$$
$$N = 1{,}00000\ 00000\ 00393\ 41246\ 691,$$
$$O = 1{,}00000\ 00000\ 00043\ 71244\ 859,$$
$$P = 1{,}00000\ 00000\ 00004\ 85693\ 682,$$
$$Q = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 53965\ 957,$$
$$R = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 05996\ 217,$$
$$S = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00666\ 246,$$
$$T = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00074\ 027,$$
$$V = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00008\ 225,$$
$$W = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 914,$$
$$X = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 102$$ [1]).

Отсюда без утомительных вычислений находим, что гиперболический логарифм числа π равен

$$1{,}14472\ 98858\ 49400\ 17414\ 345$$ [2]);

если его помножить на $0{,}43429$ и т. д., то получится, что обыкновенный логарифм числа π равен

$$0{,}49714\ 98726\ 94133\ 85435\ 128$$ [2]).

191. Так как, далее, у нас имеются выражения в виде бесконечного числа множителей для синуса и косинуса угла $\frac{m\pi}{2n}$, то мы можем удобно выразить логарифм того и другого. По найденным выше формулам

$$l\sin\frac{m\pi}{2n} = l\pi + l\frac{m}{2n} + l\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right) + l\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right) + l\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right) + \text{и т. д.},$$

$$l\cos\frac{m\pi}{2n} = l\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) + l\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right) + l\left(1-\frac{m^2}{25n^2}\right) + l\left(1-\frac{m^2}{49n^2}\right) + \text{и т. д.}$$

---

[1]) Числовые значения b, W, X исправлены в соответствии с Opera omnia.

[2]) Последняя цифра исправлена в соответствии с Opera omnia.

Отсюда прежде всего легко выражаются гиперболические логарифмы, как и раньше, посредством весьма быстро сходящихся рядов. Чтобы не перемножать бесконечные ряды без необходимости в этом, оставим первые члены в виде логарифмов; получим

$$l\sin\frac{m\pi}{2n}=l\pi+lm+l(2n-m)+l(2n+m)-l8-3ln$$
$$-\frac{m^2}{16n^2}-\frac{m^4}{2\cdot16^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot16^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot16^4n^8}-\text{и т. д.},$$
$$-\frac{m^2}{36n^2}-\frac{m^4}{2\cdot36^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot36^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot36^4n^8}-\text{и т. д.},$$
$$-\frac{m^2}{64n^2}-\frac{m^4}{2\cdot64^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot64^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot64^4n^8}-\text{и т. д.},$$
и т. д.,
$$l\cos\frac{m\pi}{2n}=l(n-m)+l(n+m)-2ln$$
$$-\frac{m^2}{9n^2}-\frac{m^4}{2\cdot9^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot9^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot9^4n^8}-\text{и т. д.},$$
$$-\frac{m^2}{25n^2}-\frac{m^4}{2\cdot25^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot25^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot25^4n^8}-\text{и т. д.},$$
$$-\frac{m^2}{49n^2}-\frac{m^4}{2\cdot49^2n^4}-\frac{m^6}{3\cdot49^3n^6}-\frac{m^8}{4\cdot49^4n^8}-\text{и т. д.},$$
и т. д.

192. В этих рядах встречаются все четные степени $\frac{m}{n}$, каждая из которых помножается на один из тех рядов, суммы которых найдены выше. Именно

$$l\sin\frac{m\pi}{2n}=lm+l(2n-m)+l(2n+m)-3ln+l\pi-l8$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{12^2}+\text{и т. д.}\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{12^4}+\text{и т. д.}\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{12^6}+\text{и т. д.}\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\frac{1}{8^8}+\frac{1}{10^8}+\frac{1}{12^8}+\text{и т. д.}\right)$$
и т. д.,
$$\cos\frac{m\pi}{2n}=l(n-m)+l(n+m)-2ln$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{и т. д.}\right)$$
$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{и т. д.}\right)$$
$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{и т. д.}\right)$$
$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{и т. д.}\right)$$
и т. д.

Суммы последних рядов[1]) получены выше (§ 190); первые же ряды[2]) могут быть выведены из этих; однако, чтобы их можно было легче применять, я присоединю сюда также и их суммы[3]).

193. Если, для краткости, положим

$$\alpha = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \text{и т. д.},$$

$$\beta = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \text{и т. д.},$$

$$\gamma = \frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \text{и т. д.},$$

$$\delta = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \text{и т. д.},$$

$$\text{и т. д.},$$

то для сумм этих рядов будем иметь приближенные значения

$$\begin{aligned}
\alpha &= 0{,}41123\ 35167\ 12056\ 60911\ 810,\\
\beta &= 0{,}06764\ 52021\ 06946\ 13696\ 975,\\
\gamma &= 0{,}01589\ 59853\ 43507\ 01780\ 804,\\
\delta &= 0{,}00392\ 21771\ 72648\ 22007\ 570,\\
\varepsilon &= 0{,}00097\ 75337\ 64773\ 25984\ 896,\\
\zeta &= 0{,}00024\ 42007\ 04724\ 92872\ 273,\\
\eta &= 0{,}00006\ 10388\ 94539\ 49332\ 915,\\
\theta &= 0{,}00001\ 52590\ 22251\ 27271\ 502,\\
\iota &= 0{,}00000\ 38147\ 11827\ 44318\ 008,\\
\varkappa &= 0{,}00000\ 09536\ 75226\ 17534\ 053,\\
\lambda &= 0{,}00000\ 02384\ 18635\ 95259\ 255,\\
\mu &= 0{,}00000\ 00596\ 04648\ 32831\ 556,\\
\nu &= 0{,}00000\ 00149\ 01161\ 41589\ 813,\\
\xi &= 0{,}00000\ 00037\ 25290\ 31233\ 986,\\
o &= 0{,}00000\ 00009\ 31322\ 57548\ 284,\\
\pi &= 0{,}00000\ 00002\ 32830\ 64370\ 808,\\
\varrho &= 0{,}00000\ 00000\ 58207\ 66091\ 686,\\
\sigma &= 0{,}00000\ 00000\ 14551\ 91522\ 858,\\
\tau &= 0{,}00000\ 00000\ 03637\ 97880\ 710,\\
\upsilon &= 0{,}00000\ 00000\ 00909\ 49470\ 177,\\
\varphi &= 0{,}00000\ 00000\ 00227\ 37367\ 544,\\
\chi &= 0{,}00000\ 00000\ 00056\ 84341\ 886,\\
\psi &= 0{,}00000\ 00000\ 00014\ 21085\ 472,\\
\omega &= 0{,}00000\ 00000\ 00003\ 55271\ 368.
\end{aligned}$$

---

[1]) То есть в выражении для $l \cos \frac{m\pi}{2n}$. [*С. Л.*]

[2]) То есть в выражении для $l \sin \frac{m\pi}{2n}$. [*С. Л.*]

[3]) В их окончательном числовом выражении. [*С. Л.*]

Остальные суммы убывают таким образом, что каждая вчетверо меньше предыдущей [1]).

194. Воспользовавшись этими данными, получим

$$l\sin\frac{m\pi}{2n}=lm+l(2n-m)+l(2n+m)-3ln+l\pi-l8$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\left(\alpha-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{m^4}{2n^4}\left(\beta-\frac{1}{2^4}\right)-\frac{m^6}{3n^6}\left(\gamma-\frac{1}{2^6}\right)-\text{ и т. д.},$$
$$l\cos\frac{m\pi}{2n}=l(n-m)+l(n+m)-2ln$$
$$-\frac{m^2}{n^2}(A-1)-\frac{m^4}{2n^4}(B-1)-\frac{m^6}{3n^6}(C-1)-\text{ и т. д.}$$

А так как логарифмы $l\pi$ и $l8$ даны, то *гиперболический логарифм синуса угла* $\frac{m}{n}90^\circ$ будет равен

$$\begin{aligned}
&lm+l(2n-m)+l(2n+m)-3ln\\
&-\ 0{,}93471\ 16558\ 30435\ 75411\\
&-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0{,}16123\ 35167\ 12056\ 60912\\
&-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}00257\ 26010\ 53473\ 06848\\
&-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}00009\ 03284\ 47835\ 67260\\
&-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}00000\ 39817\ 93162\ 05502\\
&-\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00000\ 01942\ 52954\ 65197\\
&-\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000\ 00100\ 13287\ 48812\\
&-\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000\ 00005\ 34041\ 35619\\
&-\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 29148\ 59659\\
&-\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 01617\ 97980\\
&-\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00090\ 97691\\
&-\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00005\ 16828\\
&-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 29608\\
&-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 01708\\
&-\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00099\\
&-\frac{m^{30}}{n^{30}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00006,
\end{aligned}$$

[1]) Некоторые из приведенных чисел исправлены в соответствии с Opera omnia.

гиперболический же логарифм косинуса угла $\frac{m}{n}90^\circ$ будет равен

$$
\begin{aligned}
& l(n-m)+l(n+m)-2ln \\
& -\frac{m^2}{n^2}\cdot 0{,}23370\ 05501\ 36169\ 82735 \\
& -\frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}00733\ 90158\ 02096\ 02727 \\
& -\frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}00048\ 23588\ 80314\ 04064 \\
& -\frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}00003\ 87947\ 56324\ 02983 \\
& -\frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00000\ 34082\ 72608\ 96510 \\
& -\frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000\ 03143\ 08097\ 18660 \\
& -\frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000\ 00298\ 91502\ 74450 \\
& -\frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000\ 00029\ 04644\ 67239 \\
& -\frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000\ 00002\ 86826\ 39518 \\
& -\frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 28680\ 76975 \\
& -\frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 02896\ 97956 \\
& -\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00295\ 06025 \\
& -\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00030\ 26250 \\
& -\frac{m^{28}}{n^{28}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00003\ 12232 \\
& -\frac{m^{30}}{n^{30}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 32380 \\
& -\frac{m^{32}}{n^{32}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 03373 \\
& -\frac{m^{34}}{n^{34}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00353 \\
& -\frac{m^{36}}{n^{36}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00037 \\
& -\frac{m^{38}}{n^{38}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00004
\end{aligned}
$$
[1]).

195. Если эти гиперболические логарифмы синусов и косинусов помножить на 0,43429 44819 и т. д., то получатся их обыкновенные логарифмы, отнесенные к радиусу, равному единице. Но так как в таблицах логарифм полного синуса[1]) обычно принимается равным 10, то для получения табличных логарифмов синусов и косинусов следует после умножения прибавить 10. Отсюда

[1]) Некоторые из числовых коэффициентов в последних двух формулах исправлены в соответствии с Opera omnia.

Табличный логарифм синуса угла $\frac{m}{n}\,90^\circ$ равен

$$
\begin{aligned}
& lm + l(2n-m) + l(2n+m) - 3ln \\
& + \quad 9{,}59405\ 98857\ 02190 \\
& - \frac{m^2}{n^2}\cdot 0{,}07002\ 28266\ 05902 \\
& - \frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}00111\ 72664\ 41662 \\
& - \frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}00003\ 92291\ 46454 \\
& - \frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}00000\ 17292\ 70798 \\
& - \frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00000\ 00843\ 62986 \\
& - \frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000\ 00043\ 48715 \\
& - \frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000\ 00002\ 31931 \\
& - \frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 12659 \\
& - \frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00703 \\
& - \frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00040.
\end{aligned}
$$

Табличный логарифм косинуса угла $\frac{m}{n}\,90^\circ$ равен

$$
\begin{aligned}
& l(n-m) + l(n+m) - 2ln \\
& + \quad 10{,}00000\ 00000\ 00000 \\
& - \frac{m^2}{n^2}\cdot 0{,}10149\ 48593\ 41893 \\
& - \frac{m^4}{n^4}\cdot 0{,}00318\ 72940\ 65451 \\
& - \frac{m^6}{n^6}\cdot 0{,}00020\ 94858\ 00017 \\
& - \frac{m^8}{n^8}\cdot 0{,}00001\ 68483\ 48598 \\
& - \frac{m^{10}}{n^{10}}\cdot 0{,}00000\ 14801\ 93987 \\
& - \frac{m^{12}}{n^{12}}\cdot 0{,}00000\ 01365\ 02272 \\
& - \frac{m^{14}}{n^{14}}\cdot 0{,}00000\ 00129\ 81715 \\
& - \frac{m^{16}}{n^{16}}\cdot 0{,}00000\ 00012\ 61471 \\
& - \frac{m^{18}}{n^{18}}\cdot 0{,}00000\ 00001\ 24567 \\
& - \frac{m^{20}}{n^{20}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 12456 \\
& - \frac{m^{22}}{n^{22}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 01258
\end{aligned}
$$

$$-\frac{m^{24}}{n^{24}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00128$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}\cdot 0{,}00000\ 00000\ 00013\ ^{1)}.$$

196. Итак, при помощи этих формул могут быть найдены логарифмы синусов и косинусов любых углов, как гиперболические, так и обыкновенные, хотя бы сами синусы и косинусы были неизвестны. По логарифмам же синусов и косинусов путем простого вычитания находятся логарифмы тангенсов, котангенсов, секансов и косекансов, вследствие чего нет надобности в особых для них формулах. Впрочем, следует заметить, что для чисел m, n, $n-m$, $n+m$ и т. д. надо брать гиперболические логарифмы, когда ищутся гиперболические логарифмы синусов и косинусов, и обыкновенные, когда требуется определить обыкновенные логарифмы при помощи последних формул. Кроме того, $\frac{m}{n}$ означает отношение данного угла к прямому; так как синусы углов, бо́льших полупрямого, равны косинусам углов, меньших полупрямого, и наоборот, то дробь $\frac{m}{n}$ не придется принимать большей, чем $\frac{1}{2}$; вследствие этого члены сходятся гораздо быстрее, так что для поставленной цели достаточно половины их.

197. Прежде чем покончить с этим вопросом, откроем более удобный, чем дает предыдущая глава, способ нахождения тангенсов и секансов любых углов. Хотя тангенсы и секансы определяются по синусам и косинусам, однако это производится посредством деления, что слишком затруднительно при таких числах. Правда, мы уже выше дали выражение для тангенсов и котангенсов (§ 135), но там нельзя было обосновать вывод этих формул, и мы оставили его для настоящей главы.

198. Прежде всего мы берем из § 181 выражение для тангенса угла $\frac{m\pi}{2n}$. Так как

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\text{ и т. д.}=\frac{\pi}{4mn}\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n},$$

то

$$\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\frac{1}{25n^2-m^2}+\text{ и т. д.}\right).$$

Затем, так как

$$\frac{1}{n^2-m^2}+\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{9n^2-m^2}+\text{ и т. д.}=\frac{1}{2m^2}-\frac{\pi}{2mn}\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{n},$$

то, написав $2n$ вместо n, получим

$$\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{2n}{m\pi}-\frac{4mn}{\pi}\left(\frac{1}{4n^2-m^2}+\frac{1}{16n^2-m^2}+\frac{1}{36n^2-m^2}+\text{ и т. д.}\right).$$

[1]) Некоторые из числовых коэффициентов в последних двух формулах исправлены в соответствии с Opera omnia.

Развернем эти дроби, кроме первых, так как они легко могут быть вычислены, в бесконечные ряды; тогда

$$\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{mn}{n^2-m^2}\cdot\frac{4}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{3^2n}+\frac{m^3}{3^4n^3}+\frac{m^5}{3^6n^5}+\text{ и т. д.}\right)$$
$$+\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{5^2n}+\frac{m^3}{5^4n^3}+\frac{m^5}{5^6n^5}+\text{ и т. д.}\right)$$
$$+\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{7^2n}+\frac{m^3}{7^4n^3}+\frac{m^5}{7^6n^5}+\text{ и т. д.}\right)$$
и т. д.,

$$\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\cdot\frac{2}{\pi}-\frac{mn}{4n^2-m^2}\cdot\frac{4}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{4^2n}+\frac{m^3}{4^4n^3}+\frac{m^5}{4^6n^5}+\text{ и т. д.}\right)$$
$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{6^2n}+\frac{m^3}{6^4n^3}+\frac{m^5}{6^6n^5}+\text{ и т. д.}\right)$$
$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{8^2n}+\frac{m^3}{8^4n^3}+\frac{m^5}{8^6n^5}+\text{ и т. д.}\right)$$
и т. д.

198bis[1]). Из известного уже нам значения для π находим

$$\frac{1}{\pi}=0{,}31830\ 98861\ 83790\ 67153\ 77675\ 26745\ 028724\text{[2])}.$$

Затем здесь встречаются те ряды, которые выше мы обозначали буквами A, B, C, D и т. д. и α, β, γ, δ и т. д. Заметив это, получим

$$\operatorname{tg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{mn}{n^2-m^2}\cdot\frac{4}{\pi}+\frac{m}{n}\cdot\frac{4}{\pi}(A-1)+\frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{4}{\pi}(B-1)+$$
$$+\frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{4}{\pi}(C-1)+\frac{m^7}{n^7}\cdot\frac{4}{\pi}(D-1)+\text{ и т. д.}$$

Затем для котангенса будет

$$\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\cdot\frac{2}{\pi}-\frac{4mn}{4n^2-m^2}\cdot\frac{1}{\pi}-\frac{m}{n}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\alpha-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\beta-\frac{1}{2^4}\right)-$$
$$-\frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\gamma-\frac{1}{2^6}\right)-\text{ и т. д.}$$

Из этих формул и получились выражения, которые мы дали выше (§ 135) для тангенса и котангенса; вместе с тем (§ 137) мы показали, каким образом по тангенсам и котангенсам путем простого сложения и вычитания находятся секансы и косекансы. При помощи этих правил все таблицы синусов, тангенсов и секансов, а также их логарифмов могут быть вычислены гораздо легче, чем это было сделано первыми составителями таблиц.

---

[1]) В первом издании § 198 по ошибке повторен. Чтобы не изменять нумерации всех последующих параграфов, настоящий параграф помечен номером 198bis.

[2]) Двадцать девятая цифра после запятой исправлена согласно Opera omnia.

ГЛАВА XII

О РАЗЛОЖЕНИИ ДРОБНЫХ ФУНКЦИЙ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧАСТНЫЕ ДРОБИ

199. Выше, в главе второй, уже был изложен метод разложения любой дробной функции на столько частей, сколько простых множителей имеет ее знаменатель, причем эти множители дают знаменатели частных дробей. Отсюда ясно, что если у знаменателя будут какие-либо простые мнимые множители, то полученные отсюда дроби будут также мнимыми; в этих случаях мало будет пользы от разложения действительной дроби на мнимые. Но я показал, что всякую целую функцию, — какой является знаменатель любой дроби, — сколько бы она ни имела простых мнимых множителей, всегда можно разложить на действительные двойные, или второго измерения, множители, и таким путем можно избежать мнимых количеств при разложении дробей, если мы примем в качестве знаменателей частных дробей не простые множители главного знаменателя, а двойные действительные.

200. Итак, пусть дана дробная функция $\frac{M}{N}$ и из нее выделено по изложенному выше методу столько простых дробей, сколько знаменатель N имеет простых действительных множителей. Пусть вместо мнимых множителей множителем N будет выражение

$$p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2;$$

так как при этом надлежит числитель и знаменатель рассматривать в развернутом виде, то пусть данная дробь будет

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ и т. д.}}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{ и т. д.})}.$$

Пусть теперь

$$\frac{\mathfrak{A} + az}{p^2 + 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}$$

есть частная дробь, возникающая из знаменателя $p^2 + 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$; в ней переменное z имеет в знаменателе два измерения, поэтому в числителе оно может иметь одно измерение, но не больше; иначе в нем содержалась бы целая функция, которую следует исключить в отдельное слагаемое.

201. Пусть для краткости числитель

$$A+Bz+Cz^2+ \text{ и т. д.} = M,$$

а второй множитель знаменателя

$$\alpha+\beta z+\gamma z^2+ \text{ и т. д.} = Z;$$

пусть дробь, которая должна возникнуть из множителя Z знаменателя, равна $\frac{Y}{Z}$; тогда $Y=\frac{M-\mathfrak{A}Z-\mathfrak{a}zZ}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}$; это выражение должно быть целой функцией z, и вследствие этого необходимо, чтобы

$$M-\mathfrak{A}Z-\mathfrak{a}zZ$$

делилось на $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$. Поэтому, если положить

$$p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2=0,$$

т. е. если положить как

$$z=\frac{p}{q}\left(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi\right),$$

так и

$$z=\frac{p}{q}\left(\cos\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi\right),$$

то $M-\mathfrak{A}Z-\mathfrak{a}zZ$ исчезнет. Пусть $\frac{p}{q}=f$, тогда

$$z^n=f^n\left(\cos n\varphi\pm\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi\right).$$

Подстановка этих двух значений для z даст два уравнения, откуда можно определить обе неизвестные постоянные $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{a}$.

202. После этой подстановки уравнение

$$M=\mathfrak{A}Z+\mathfrak{a}zZ$$

в развернутом виде дает такое уравнение:

$$\begin{aligned}
&A+Bf\cos\varphi+Cf^2\cos 2\varphi+Df^3\cos 3\varphi+ \text{ и т. д.}\\
&\qquad\pm\left(Bf\sin\varphi+Cf^2\sin 2\varphi+Df^3\sin 3\varphi+ \text{ и т. д.}\right)\sqrt{-1}\\
&=\mathfrak{A}\left(\alpha+\beta f\cos\varphi+\gamma f^2\cos 2\varphi+\delta f^3\cos 3\varphi+ \text{и т. д.}\right)\\
&\qquad\pm\mathfrak{A}\left(\beta f\sin\varphi+\gamma f^2\sin 2\varphi+\delta f^3\sin 3\varphi+ \text{ и т. д.}\right)\sqrt{-1}\\
&\qquad+\mathfrak{a}\left(\alpha f\cos\varphi+\beta f^2\cos 2\varphi+\gamma f^3\cos 3\varphi+ \text{ и т. д.}\right)\\
&\qquad\qquad\pm\mathfrak{a}\left(\alpha f\sin\varphi+\beta f^2\sin 2\varphi+\gamma f^3\sin 3\varphi+ \text{ и т. д.}\right)\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Если для сокращения вычислений принять

$$\begin{aligned}
A+Bf\cos\varphi+Cf^2\cos 2\varphi+Df^3\cos 3\varphi+ \text{ и т. д.} &= \mathfrak{P},\\
Bf\sin\varphi+Cf^2\sin 2\varphi+Df^3\sin 3\varphi+ \text{ и т. д.} &= \mathfrak{p},\\
\alpha+\beta f\cos\varphi+\gamma f^2\cos 2\varphi+\delta f^3\cos 3\varphi+ \text{ и т. д.} &= \mathfrak{Q},\\
\beta f\sin\varphi+\gamma f^2\sin 2\varphi+\delta f^3\sin 3\varphi+ \text{ и т. д.} &= \mathfrak{q},\\
\alpha f\cos\varphi+\beta f^2\cos 2\varphi+\gamma f^3\cos 3\varphi+ \text{ и т. д.} &= \mathfrak{R},\\
\alpha f\sin\varphi+\beta f^2\sin 2\varphi+\gamma f^3\sin 3\varphi+ \text{ и т. д.} &= \mathfrak{r},
\end{aligned}$$

то при этих обозначениях будет

$$\mathfrak{P}\pm\mathfrak{p}\sqrt{-1}=\mathfrak{A}\mathfrak{Q}\pm\mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1}+\mathfrak{a}\mathfrak{R}\pm\mathfrak{a}\mathfrak{r}\sqrt{-1}.$$

203. Вследствие двойственности знаков получаются такие два уравнения:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \mathfrak{a}\mathfrak{R},$$
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{q} + \mathfrak{a}\mathfrak{r},$$

из которых неизвестные $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{a}$ определяются так:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}\mathfrak{r}}.$$

Таким образом, если дана дробь

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)\,Z},$$

то возникающая из нее частная дробь

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2}$$

определится следующим образом. Полагаем $f = \frac{p}{q}$ и пусть

$$\begin{array}{lll} \text{при} & z^n = f^n \cos n\varphi & M = \mathfrak{P}, \\ \text{»} & z^n = f^n \sin n\varphi & M = \mathfrak{p}, \\ \text{»} & z^n = f^n \cos n\varphi & Z = \mathfrak{Q}, \\ \text{»} & z^n = f^n \sin n\varphi & Z = \mathfrak{q}, \\ \text{»} & z^n = f^n \cos n\varphi & zZ = \mathfrak{R}, \\ \text{»} & z^n = f^n \sin n\varphi & zZ = \mathfrak{r}. \end{array}$$

Когда таким образом найдены значения $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, то получаем

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}}.$$

ПРИМЕР 1

Пусть дана дробная функция

$$\frac{z^2}{(1 - z + z^2)(1 + z^4)};$$

надо определить ее часть, возникающую от множителя $1 - z + z^2$ знаменателя; пусть это будет

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{1 - z + z}.$$

Прежде всего сравнение этого множителя с общим выражением

$$p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$$

дает

$$p = 1, \quad q = 1 \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{1}{2},$$

откуда

$$\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}.$$

Поэтому, ввиду того, что

$$M = z^2, \quad Z = 1 + z^4 \quad \text{и} \quad f = 1,$$

будем иметь

$$\mathfrak{P} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \qquad \mathfrak{p} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \cos\frac{4\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \mathfrak{q} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\mathfrak{R} = \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} = 1, \quad \mathfrak{r} = 0.$$

Отсюда находим

$$\mathfrak{A} = -1 \quad \text{и} \quad \mathfrak{a} = 0,$$

вследствие чего искомая дробь будет

$$\frac{-1}{1-z+z^2},$$

а ее дополнением будет

$$\frac{1+z+z^2}{1+z^4};$$

знаменатель последней дроби $1+z^4$ имеет множители

$$1+z\sqrt{2}+z^2 \quad \text{и} \quad 1-z\sqrt{2}+z^2,$$

поэтому разложение можно начать снова; получим $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и в первом случае $f = -1$, а во втором $f = +1$.

ПРИМЕР 2

Пусть, в самом деле, требуется разложить дробь

$$\frac{1+z+z^2}{(1+z\sqrt{2}+z^2)(1-z\sqrt{2}+z^2)}.$$

Имеем

$$M = 1+z+z^2,$$

и для первого множителя будет

$$f = -1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \text{и} \quad Z = 1 - z\sqrt{2} + z^2;$$

отсюда

$$\mathfrak{P} = 1 - \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathfrak{p} = -\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}},$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} = 2,$$

$$\mathfrak{q} = +\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{4} = 2,$$

$$\mathfrak{R} = -\cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4} = 0,$$

$$\mathfrak{r} = -\sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{4} - \sin\frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{2}.$$

Отсюда находим

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-q\mathfrak{R}=-4\sqrt{2}$$

и

$$\mathfrak{A}=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}},\quad \mathfrak{a}=0;$$

таким путем из множителя $1+z\sqrt{2}+z^2$ знаменателя возникает частная дробь

$$\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1+z\sqrt{2}+z^2};$$

другой же множитель знаменателя даст подобным образом такую дробь

$$\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1-z\sqrt{2}+z^2}.$$

Итак, заданная вначале функция

$$\frac{z^2}{(1-z+z^2)(1+z^4)}$$

разлагается на такие:

$$\frac{-1}{1-z+z^2}+\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1+z\sqrt{2}+z^2}+\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1-z\sqrt{2}+z^2}.$$

ПРИМЕР 3

Пусть предложено разложить дробь

$$\frac{1+2z+z^2}{\left(1+\frac{8}{5}z+z^2\right)(1+2z+3z^2)}.$$

Для множителя $1-\frac{8}{5}z+z^2$ знаменателя получается дробь

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{1-\frac{8}{5}z+z^2};$$

при этом

$$p=1,\quad q=1,\quad \cos\varphi=\frac{4}{5},$$

откуда

$$f=1,\quad M=1+2z+z^2,\quad Z=1+2z+3z^2.$$

Поскольку здесь отношение угла φ к прямому неизвестно, то синусы и косинусы кратных ему углов следует определить особо. Так как $\cos\varphi=\frac{4}{5}$, то

$$\sin\varphi=\frac{3}{5},\quad \cos 2\varphi=\frac{7}{25},\quad \sin 2\varphi=\frac{24}{25},\quad \cos 3\varphi=-\frac{44}{125},\quad \sin 3\varphi=\frac{117}{125};$$

отсюда

$$\mathfrak{P}=1+2\cdot\frac{4}{5}+\frac{7}{25}=\frac{72}{25},$$

$$\mathfrak{p}=2\cdot\frac{3}{5}+\frac{24}{25}=\frac{54}{25},$$

$$\mathfrak{Q}=1+2\cdot\frac{4}{5}+3\cdot\frac{7}{25}=\frac{86}{25},$$

$$\mathfrak{q}=2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{24}{25}=\frac{102}{25},$$

$$\mathfrak{R}=\frac{4}{5}+2\cdot\frac{7}{25}-3\cdot\frac{44}{125}=\frac{38}{125},$$

$$\mathfrak{r}=\frac{3}{5}+2\cdot\frac{24}{25}+3\cdot\frac{117}{125}=\frac{666}{125},$$

и вследствие этого

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r}-\mathfrak{q}\mathfrak{R}=\frac{53400}{25\cdot 125}=\frac{2136}{125}.$$

Значит,

$$\mathfrak{A}=\frac{1836}{2136}=\frac{153}{178},$$

$$\mathfrak{a}=-\frac{540}{2136}=-\frac{45}{178}.$$

Поэтому возникающая из множителя $1-\frac{8}{5}z+z^2$ дробь будет

$$\frac{9(17-5z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2}.$$

Найдем подобным образом дробь, соответствующую другому множителю; имеем

$$p=1,\quad q=-\sqrt{3}$$

и

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

значит,

$$f=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad M=1+2z+z^2$$

и

$$Z=1-\frac{8}{5}z+z^2.$$

Так как $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$, то

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\quad \cos 2\varphi=-\frac{1}{3},\quad \sin 2\varphi=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\cos 3\varphi=-\frac{5}{3\sqrt{3}},\quad \sin 3\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{P} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$\mathfrak{p} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \frac{8}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{3} = \frac{64}{45},$$

$$\mathfrak{q} = +\frac{8}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{34\sqrt{2}}{45},$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5 \cdot 3} \cdot \frac{-1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{-5}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{135},$$

$$\mathfrak{r} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5 \cdot 3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{-98\sqrt{2}}{135};$$

значит,

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = -\frac{712\sqrt{2}}{675};$$

стало быть,

$$\mathfrak{A} = \frac{100}{712} = \frac{25}{178}, \quad \mathfrak{a} = \frac{540}{712} = \frac{135}{178}.$$

Итак, заданная дробь

$$\frac{1+2z+z^2}{\left(1-\frac{8}{5}z+z^2\right)(1+2z+3z^2)}$$

разлагается на частные дроби:

$$\frac{9(17-5z):178}{1-\frac{8}{5}z+z^2} + \frac{5(5+27z):178}{1+2z+3z^2}.$$

204. Значения букв $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{r}$ могут быть определены по буквам $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{q}$. Действительно, так как

$$\mathfrak{Q} = \alpha + \beta f \cos\varphi + \gamma f^2 \cos 2\varphi + \delta f^3 \cos 3\varphi + \text{ и т. д.},$$

$$\mathfrak{q} = \qquad \beta f \sin\varphi + \gamma f^2 \sin 2\varphi + \delta f^3 \sin 3\varphi + \text{ и т. д.},$$

то

$$\mathfrak{Q}\cos\varphi - \mathfrak{q}\sin\varphi = \alpha\cos\varphi + \beta f\cos 2\varphi + \gamma f^2 \cos 3\varphi + \text{ и т. д.},$$

и, значит,

$$\mathfrak{R} = f(\mathfrak{Q}\cos\varphi - \mathfrak{q}\sin\varphi).$$

Далее,

$$\mathfrak{Q}\sin\varphi + \mathfrak{q}\cos\varphi = \alpha\sin\varphi + \beta f \sin 2\varphi + \gamma f^2 \sin 3\varphi + \text{ и т. д.},$$

и, значит,

$$\mathfrak{r} = f(\mathfrak{Q}\sin\varphi - \mathfrak{q}\cos\varphi).$$

Отсюда, далее, получаем

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = (\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2) f \sin\varphi,$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}) f \sin\varphi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}) f \cos\varphi,$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\mathfrak{a} = \frac{-\mathfrak{P}\mathfrak{q} + \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)\, f \sin\varphi}.$$

Итак, из множителя $p^2 + 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ знаменателя возникает частная дробь

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - \mathfrak{p}\mathfrak{q})\, f \sin\varphi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})(f\cos\varphi - z)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)\, f \sin\varphi}$$

или, так как $f = \frac{p}{q}$,

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q})\, p \sin\varphi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})(p\cos\varphi - qz)}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)(\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2)\, p \sin\varphi}.$$

205. Вот какая дробь возникает из множителя $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$ знаменателя данной функции

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)\, Z};$$

при этом буквы $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{q}$ находятся из функций M и Z следующим образом: пусть при подстановке $z^n = \frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi$

$$M = \mathfrak{P} \quad \text{и} \quad Z = \mathfrak{Q},$$

а при подстановке $z^n = \frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi$

$$M = \mathfrak{p} \quad \text{и} \quad Z = \mathfrak{q},$$

причем следует заметить, что перед этой подстановкой функции M и Z должны быть развернуты, чтобы они имели такой вид:

$$M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ и т. д.},$$
$$Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{ и т. д.};$$

тогда ввиду сказанного

$$\mathfrak{P} = A + B\frac{p}{q}\cos\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + D\frac{p^3}{q^3}\cos 3\varphi + \text{ и т. д.},$$
$$\mathfrak{p} = B\frac{p}{q}\sin\varphi + C\frac{p^2}{q^2}\sin 2\varphi + D\frac{p^3}{q^3}\sin 3\varphi + \text{ и т. д.},$$
$$\mathfrak{Q} = \alpha + \beta\frac{p}{q}\cos\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + \delta\frac{p^3}{q^3}\cos 3\varphi + \text{ и т. д.},$$
$$\mathfrak{q} = \beta\frac{p}{q}\sin\varphi + \gamma\frac{p^2}{q^2}\sin 2\varphi + \delta\frac{p^3}{q^3}\sin 3\varphi + \text{ и т. д.}$$

206. Из предыдущего понятно, что это решение не будет иметь места, если функция Z будет заключать в себе еще такой же множитель $p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2$; в этом случае при подстановке

$$z^n = f^n(\cos n\varphi \pm \sqrt{-1}\sin n\varphi)$$

в уравнение

$$M = \mathfrak{A}Z + \mathfrak{a}zZ$$

количество Z исчезнет, и поэтому нельзя будет сделать никакого вывода. Вследствие этого, когда знаменатель дробной функции $\frac{M}{N}$ содержит множитель $(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2$ или более высокую степень, то является необходимость в особом способе решения. Итак, пусть

$$N=(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2 Z,$$

и пусть из множителя $(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2$ знаменателя возникнут две частных дроби:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2}+\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2},$$

причем надо определить постоянные буквы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$.

207. При этих допущениях выражение

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z-(\mathfrak{B}+\mathfrak{b}z)Z(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^2}$$

должно быть целой функцией и, значит, числитель должен делиться на знаменатель. Прежде всего выражение

$$M-\mathfrak{A}Z-\mathfrak{a}zZ$$

должно делиться на $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$; так как это будет предыдущий случай, то буквы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{a}$ определятся таким же образом, как и выше.

Пусть при $z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi$ будет

$$M=\mathfrak{P} \quad \text{и} \quad Z=\mathfrak{N},$$

а при $z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi$ будет

$$M=\mathfrak{p} \quad \text{и} \quad Z=\mathfrak{n}.$$

Тогда согласно указанному выше правилу будем иметь

$$\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N}+\mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}+\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n}-\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\mathfrak{a}=\frac{-\mathfrak{P}\mathfrak{n}+\mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2+\mathfrak{n}^2}\cdot\frac{q}{p\sin\varphi}.$$

208. Когда таким образом найдены $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{a}$, то

$$\frac{M-(\mathfrak{A}+\mathfrak{a}z)Z}{p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2}$$

будет целой функцией, которая пусть будет равна P; при этом, как и прежде,

$$P-\mathfrak{B}Z-\mathfrak{b}zZ$$

будет делиться на $p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2$; и так как это выражение сходно с предыдущим, то, если

$$\text{при } z^n=\frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \quad \text{положим} \quad P=\mathfrak{R}$$

и

$$\text{при } z^n=\frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \quad \text{положим} \quad P=\mathfrak{r},$$

получим

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N} + \mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n} - \mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\mathfrak{b} = \frac{-\mathfrak{R}\mathfrak{n} + \mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{q}{p\sin\varphi}.$$

209. Отсюда уже можно вывести общее заключение, как надо поступать, когда знаменатель данной функции $\frac{M}{N}$ будет иметь множитель

$$(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k.$$

Пусть

$$N = (p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k Z,$$

т. е. надо разложить дробную функцию

$$\frac{M}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k Z}.$$

Положим, что множитель $(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k$ знаменателя дает такие слагаемые:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^k} + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^{k-1}} +$$
$$+ \frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{c}z}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^{k-2}} + \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{d}z}{(p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2)^{k-3}} + \text{ и т. д.};$$

тогда, если

$$\text{при } z^n = \frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \text{ будет } M = \mathfrak{M} \text{ и } Z = \mathfrak{N}$$

и

$$\text{при } z^n = \frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \text{ будет } M = \mathfrak{m} \text{ и } Z = \mathfrak{n},$$

то будем иметь

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{N} + \mathfrak{m}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{n} - \mathfrak{m}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\mathfrak{a} = \frac{-\mathfrak{M}\mathfrak{n} + \mathfrak{m}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Положим затем

$$\frac{M - (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z)Z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2} = P,$$

и пусть

$$\text{при } z^n = \frac{p^n}{q^n}\cos n\varphi \text{ будет } P = \mathfrak{P}$$

и

$$\text{при } z^n = \frac{p^n}{q^n}\sin n\varphi \text{ будет } P = \mathfrak{p};$$

тогда

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N} + \mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n} - \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \qquad \mathfrak{b} = \frac{-\mathfrak{P}\mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Потом положим

$$\frac{P - (\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z)Z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2} = Q,$$

и пусть

$$\text{при } z^n = \frac{p^n}{q^n} \cos n\varphi \text{ будет } Q = \mathfrak{Q}$$

и

$$\text{при } z^n = \frac{p^n}{q^n} \sin n\varphi \text{ будет } Q = \mathfrak{q};$$

тогда

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{N} + \mathfrak{q}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n} - \mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\mathfrak{c} = \frac{-\mathfrak{Q}\mathfrak{n} + \mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Положим, далее,

$$\frac{Q - (\mathfrak{C} + \mathfrak{c}z) Z}{p^2 - 2pqz\cos\varphi + q^2z^2} = R,$$

и пусть

$$\text{при } z^n = \frac{p^n}{q^n} \cos n\varphi \text{ будет } R = \mathfrak{R}$$

и

$$\text{при } z^n = \frac{p^n}{q^n} \sin n\varphi \text{ будет } R = \mathfrak{r};$$

тогда

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N} + \mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n} - \mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\mathfrak{d} = \frac{-\mathfrak{R}\mathfrak{n} + \mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} \cdot \frac{q}{p\sin\varphi}.$$

Так надо поступать до тех пор, пока не будет определен числитель последней дроби, у которой знаменатель есть $p^2 - 2pqz\cos\varphi + p^2z^2$.

ПРИМЕР

Пусть дана дробная функция

$$\frac{z - z^3}{(1+z^2)^4\,(1+z^4)},$$

у которой из множителя $(1+z^2)^4$ знаменателя возникают такие частные дроби:

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z}{(1+z^2)^4} + \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z}{(1+z^2)^3} + \frac{\mathfrak{C} + \mathfrak{c}z}{(1+z^2)^2} + \frac{\mathfrak{D} + \mathfrak{d}z}{1+z^2}.$$

При сопоставлении с общим видом получится

$$p = 1,\ q = 1,\ \cos\varphi = 0, \text{ откуда } \varphi = \frac{\pi}{2},$$

далее,

$$M = z - z^3 \text{ и } Z = 1 + z^4;$$

отсюда

$$\mathfrak{M} = 0,\ \mathfrak{m} = 2,\ \mathfrak{N} = 2,\ \mathfrak{n} = 0 \text{ и } \sin\varphi = 1.$$

Итак, находим

$$\mathfrak{A} = -\frac{4}{4} \cdot 0 = 0 \text{ и } \mathfrak{a} = 1;$$

значит,

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{a}z = z;$$

отсюда

$$P = \frac{z - z^3 - z - z^5}{1 + z^2} = -z^3$$

и

$$\mathfrak{P} = 0, \quad \mathfrak{p} = 1,$$

откуда находим

$$\mathfrak{B} = 0 \text{ и } \mathfrak{b} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z = \frac{1}{2}z$$

и

$$Q = \frac{-z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^5}{1 + z^2} = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3;$$

отсюда

$$\mathfrak{Q} = 0 \text{ и } \mathfrak{q} = 0,$$

следовательно,

$$\mathfrak{C} = 0 \text{ и } \mathfrak{c} = 0.$$

Поэтому

$$R = \frac{-\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3}{1 + z^2} = -\frac{1}{2}z,$$

значит,

$$\mathfrak{R} = 0 \text{ и } \mathfrak{r} = -\frac{1}{2},$$

откуда

$$\mathfrak{D} = 0 \text{ и } \mathfrak{d} = -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, искомые дроби будут

$$\frac{z}{(1 + z^2)^4} + \frac{z}{2(1 + z^2)^3} - \frac{z}{4(1 + z^2)}.$$

Числитель же оставшейся дроби

$$S = \frac{R - (\mathfrak{D} + \mathfrak{d}z)Z}{1 + z^2} = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^3,$$

поэтому она будет равна

$$\frac{-z + z^3}{4(1 + z^4)}.$$

210. Этот метод одновременно доставляет также дополнительную дробь, которая вместе с найденными составляет всю данную. В самом деле, если у дроби

$$\frac{M}{(p^2-2pqz\cos\varphi+q^2z^2)^k Z}$$

найдены все частные дроби, получающиеся из множителя $(p^2-2pqz\cos\varphi+ + q^2z^2)^k$, и для них составлены значения функций P, Q, R, S, T, то при дальнейшем продолжении ряда этих букв та из них, которая следует за последней для определения числителей, и будет числителем оставшейся дроби со знаменателем Z; именно, если $k=1$, то оставшаяся дробь будет $\frac{P}{Z}$; если $k=2$, то оставшаяся дробь будет $\frac{Q}{Z}$; если $k=3$, то она будет $\frac{R}{Z}$, и т. д. Когда же эта оставшаяся дробь со знаменателем Z найдена, то она может быть разложена дальше по указанным правилам.

ГЛАВА XIII

О РЕКУРРЕНТНЫХ РЯДАХ

211. К рядам этого рода, которые Моавр обычно называет рекуррентными [41], я отношу здесь все ряды, возникающие из развертывания какой-либо дробной функции путем фактического деления. Выше мы уже показали, что эти ряды построены так, что любой член определяется по нескольким предыдущим согласно некоторому постоянному закону, зависящему от знаменателя дробной функции. Так как я теперь изложил уже разложение любой дробной функции на другие, более простые, то отсюда рекуррентный ряд также разложится на другие более простые. В этой главе излагается разложение рекуррентных рядов любого порядка на более простые.

212. Пусть задана правильная дробная функция

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\text{ и т. д.}}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\text{ и т. д.}},$$

которая путем деления развертывается в рекуррентный ряд

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\text{ и т. д.};$$

выше показано, как образуются его коэффициенты. Если эту дробную функцию разложить на ее простые дроби и каждую из них развернуть в рекуррентный ряд, то ясно, что сумма всех этих рядов, возникших из частных дробей, должна быть равна рекуррентному ряду

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\text{ и т. д.}$$

Таким образом, частные дроби, путь нахождения которых указан выше, дадут частные ряды, свойства которых вследствие их простоты легко усмотреть; все же эти частные ряды вместе образуют данный рекуррентный ряд; таким образом и его природа будет изучена глубже.

213. Пусть рекуррентные ряды, возникшие из отдельных частных дробей, будут

$$\begin{array}{l}
a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\text{ и т. д.},\\
a'+b'z+c'z^2+d'z^3+e'z^4+\text{ и т. д.},\\
a''+b''z+c''z^2+d''z^3+e''z^4+\text{ и т. д.},\\
a'''+b'''z+c'''z^2+d'''z^3+e'''z^4+\text{ и т. д.}\\
\text{и т. д.}
\end{array}$$

Так как эти ряды, вместе взятые, должны равняться

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ и т. д.},$$

то необходимо, чтобы было

$$A = a + a' + a'' + a''' + \text{ и т. д.},$$
$$B = b + b' + b'' + b''' + \text{ и т. д.},$$
$$C = c + c' + c'' + c''' + \text{ и т. д.},$$
$$D = d + d' + d'' + d''' + \text{ и т. д.}$$
$$\text{и т. д.}$$

Таким образом, если мы можем определить коэффициенты степени z^n в отдельных рядах, возникших из частных дробей, то сумма этих коэффициентов даст коэффициент степени z^n в рекуррентном ряде $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ и т. д.

214. Здесь может возникнуть такое сомнение. Если два ряда между собой равны

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{ и т. д.} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \text{ и т. д.},$$

то следует ли отсюда неизбежно равенство между собой коэффициентов одинаковых степеней z; т. е. будет ли $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$, $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$ и т. д. Это сомнение легко устранится, если мы примем во внимание, что это равенство должно существовать, какое бы значение ни получило переменное z. Если $z = 0$, то ясно, что $A = \mathfrak{A}$. Отняв от обеих частей эти равные члены и разделив оставшееся уравнение на z, получим

$$B + Cz + Dz^2 + \text{ и т. д.} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}z^2 + \text{ и т. д.},$$

откуда следует $B = \mathfrak{B}$; подобным же образом покажем, что $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$ и т. д. до бесконечности [42].

215. Итак, рассмотрим ряды, возникающие из частных дробей, на которые разлагается любая данная дробь. Во-первых, ясно, что дробь

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz}$$

даст ряд

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}pz + \mathfrak{A}p^2z^2 + \mathfrak{A}p^3z^3 + \text{ и т. д.},$$

общий член которого есть

$$\mathfrak{A}p^nz^n;$$

это выражение обычно называется *общим членом*, так как из него путем последовательной подстановки вместо n всех чисел получаются все члены ряда. Затем из дроби

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^2}$$

возникает ряд

$$\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}pz + 3\mathfrak{A}p^2z^2 + 4\mathfrak{A}p^3z^3 + \text{ и т. д.},$$

общий член которого есть

$$(n+1)\mathfrak{A}p^n z^n.$$

Далее, из дроби

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^3}$$

получается ряд

$$\mathfrak{A}+3\mathfrak{A}pz+6\mathfrak{A}p^2z^2+10\mathfrak{A}p^3z^3+\text{ и т. д.},$$

общий член которого есть

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^n z^n;$$

и вообще дробь

$$\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}$$

даст ряд

$$\mathfrak{A}+k\mathfrak{A}pz+\frac{k(k+1)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^2z^2+\frac{k(k+1)(k+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\mathfrak{A}p^3z^3+\text{ и т. д.},$$

общий член которого есть

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)}\mathfrak{A}p^n z^n.$$

Из самого образования ряда вытекает, что этот член равен

$$\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\mathfrak{A}p^n z^n;$$

это выражение равно предыдущему, что выявляется, если произвести перемножение накрест: действительно, получаем

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)\ldots(n+k-1)=1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)k\ldots(k+n-1),$$

что представляет тождество.

216. Итак, всякий раз, когда при разложении дробных функций приходим к частным дробям вида $\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}$, можно определить общий член рекуррентного ряда

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{ и т. д.},$$

полученного из этой дробной функции; он будет представлять сумму общих членов рядов, которые возникают из частных дробей.

ПРИМЕР 1

Найти общий член рекуррентного ряда, получающегося из дроби $\frac{1-z}{1-z-2z^2}$.

Происходящий отсюда ряд есть

$$1+0z+2z^2+2z^3+6z^4+10z^5+22z^6+42z^7+86z^8+\text{ и т. д.}$$

Для нахождения коэффициента общей степени z^n разложим дробь

$$\frac{1-z}{1-z-2z^2}$$

на частные дроби

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+z}+\frac{\frac{1}{3}}{1-2z};$$

отсюда получается искомый общий член

$$\left[\frac{2}{3}\cdot(-1)^n+\frac{1}{3}\cdot 2^n\right]z^n=\frac{2^n\pm 2}{3}z^n,$$

где знак плюс имеет место при n четном, а знак минус — при n нечетном.

ПРИМЕР 2

Найти общий член рекуррентного ряда, возникающего из дроби

$$\frac{1-z}{1-5z+6z^2},$$

т. е. ряда

$$1+4z+14z^2+46z^3+146z^4+454z^5+ \text{ и т. д.}$$

Так как знаменатель равен $(1-2z)(1-3z)$, то эта дробь разлагается на частные дроби

$$\frac{-1}{1-2z}+\frac{2}{1-3z},$$

из которых получается общий член

$$2\cdot 3^n z^n-2^n z^n=(2\cdot 3^n-2^n)z^n.$$

ПРИМЕР 3

Найти общий член ряда

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+47z^7+ \text{ и т. д.},$$

получаемого при развертывании дроби

$$\frac{1+2z}{1-z-z^2}.$$

Так как множители знаменателя суть

$$1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z \text{ и } 1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z,$$

то при разложении получается

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z}+\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z},$$

откуда общим членом будет

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}z^n.$$

ПРИМЕР 4

Найти общий член ряда

$$a+(\alpha a+b)z+(\alpha^2 a+\alpha b+\beta a)z^2+(\alpha^3 a+\alpha^2 b+2\alpha\beta a+\beta b)z^3+\text{ и т. д.},$$

получаемого при развертывании дроби

$$\frac{a+bz}{1-\alpha z-\beta z^2}.$$

Путем разложения получаются такие две дроби:

$$\frac{[a(\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta})+2b]:2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{1+\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}z}+\frac{[a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}-\alpha)-2b]:2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{1-\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}z};$$

отсюда общий член будет

$$\frac{a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}+\alpha)+2b}{2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\cdot\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)^n z^n+$$
$$+\frac{a(\sqrt{\alpha^2+4\beta}-\alpha)-2b}{2\sqrt{\alpha^2+4\beta}}\cdot\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}\right)^n z^n.$$

Согласно этому примеру легко могут быть определены общие члены всех рекуррентных рядов, у которых каждый член определяется по двум предыдущим.

ПРИМЕР 5

Найти общий член ряда

$$1+z+2z^2+2z^3+3z^4+3z^5+4z^6+4z^7+\text{ и т. д.},$$

получающегося из дроби

$$\frac{1}{1-z-z^2+z^3}=\frac{1}{(1-z)^2(1+z)}.$$

Конечно, закон последовательности ясен с первого взгляда и не нуждается в пояснении. Дроби

$$\frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{1-z}+\frac{\frac{1}{4}}{1+z}$$

при разложении дадут такой общий член:

$$\frac{1}{2}(n+1)z^n+\frac{1}{4}z^n+\frac{1}{4}(-1)^n z^n=\frac{2n+3\pm 1}{4}z^n,$$

где имеет место верхний знак, когда n есть число четное, и нижний, когда n нечетное.

217. Этим путем могут быть получены общие члены всех рекуррентных рядов, так как все дроби можно разложить на простые частные дроби этого рода. Но если мы пожелаем избежать мнимых выражений, то часто будут получаться такие частные дроби:

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2},\quad \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2},\ \ldots,\ \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^k};$$

поэтому надо посмотреть, какие ряды получаются в результате их развертывания. Прежде всего, так как

$$\cos n\varphi = 2\cos\varphi\cos(n-1)\varphi - \cos(n-2)\varphi,$$

то развертывание дроби

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

даст

$$\begin{array}{l}\mathfrak{A}+2\mathfrak{A}pz\cos\varphi+2\mathfrak{A}p^2z^2\cos 2\varphi+2\mathfrak{A}p^3z^3\cos 3\varphi+2\mathfrak{A}p^4z^4\cos 4\varphi+\ \text{и т. д.}\\ \qquad\qquad +\mathfrak{A}p^2z^2 \qquad\qquad +2\mathfrak{A}p^3z^3\cos\varphi+2\mathfrak{A}p^4z^4\cos 2\varphi+\ \text{и т. д.}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\mathfrak{A}p^4z^4 \qquad +\ \text{и т. д.}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{и т. д.}\end{array}$$

Общий член этого ряда обнаруживается не так легко.

218. Чтобы достигнуть этой цели, рассмотрим два таких ряда:

$$Ppz\sin\varphi+Pp^2z^2\sin 2\varphi+Pp^3z^3\sin 3\varphi+Pp^4z^4\sin 4\varphi+\ \text{и т. д.},$$
$$Q+Qpz\cos\varphi+Qp^2z^2\cos 2\varphi+Qp^3z^3\cos 3\varphi+Qp^4z^4\cos 4\varphi+\ \text{и т. д.};$$

оба они получаются путем развертывания дроби со знаменателем

$$1-2pz\cos\varphi+p^2z^2.$$

Первый получается из дроби

$$\frac{Ppz\sin\varphi}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2},$$

второй же из дроби

$$\frac{Q-Qpz\cos\varphi}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}.$$

Сложим эти две дроби; при этом сумма

$$\frac{Q+Ppz\sin\varphi-Qpz\cos\varphi}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

даст ряд, общим членом которого будет

$$(P\sin n\varphi+Q\cos n\varphi)\,p^nz^n.$$

Приравняв эту дробь данной

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2},$$

получим

$$Q=\mathfrak{A} \quad \text{и} \quad P=\mathfrak{A}\operatorname{ctg}\varphi+\mathfrak{B}\operatorname{cosec}\varphi.$$

Таким образом, общим членом ряда, полученного из дроби

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2},$$

будет

$$\frac{\mathfrak{A}\cos\varphi\sin n\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi+\mathfrak{A}\sin\varphi\cos n\varphi}{\sin\varphi}\,p^nz^n=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi}\,p^nz^n.$$

219. Для нахождения общего члена в том случае, когда знаменатель дроби будет степенью вида

$$(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^k,$$

следует разложить эту дробь на две, хотя и мнимые:

$$\frac{a}{[1-(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)\,pz]^k}+\frac{b}{[1-(\cos\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)\,pz]^k}.$$

Общий член ряда, полученного из них, вместе взятых, будет

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(k-1)}(\cos n\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi)\,ap^nz^n+$$
$$+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(k-1)}(\cos n\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin n\varphi)\,bp^nz^n.$$

Пусть

$$a+b=f,\quad a-b=\frac{g}{\sqrt{-1}},$$

так что

$$a=\frac{f\sqrt{-1}+g}{2\sqrt{-1}}\quad\text{и}\quad b=\frac{f\sqrt{-1}-g}{2\sqrt{-1}};$$

тогда выражение

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(k-1)}(f\cos n\varphi+g\sin n\varphi)p^nz^n$$

будет общим членом ряда, получающегося из дробей

$$\frac{\frac{1}{2}f+\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{[1-(\cos\varphi+\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)\,pz]^k}+\frac{\frac{1}{2}f-\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{[1-(\cos\varphi-\sqrt{-1}\cdot\sin\varphi)\,pz]^k},$$

или получающегося из одной дроби

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} f-kfpz\cos\varphi+\frac{k(k-1)}{1\cdot2}fp^2z^2\cos2\varphi-\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot2\cdot3}fp^3z^3\cos3\varphi+\text{ и т. д.}\\ +kgpz\sin\varphi-\frac{k(k-1)}{1\cdot2}gp^2z^2\sin2\varphi+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot2\cdot3}gp^3z^3\sin3\varphi-\text{ и т. д.}\end{array}\right\}}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^k}.$$

220. Поэтому, если положить $k=2$, то общим членом ряда, полученного из дроби

$$\frac{f-2pz(f\cos\varphi-g\sin\varphi)+p^2z^2(f\cos2\varphi-g\sin2\varphi)}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2},$$

будет

$$(n+1)(f\cos n\varphi+g\sin n\varphi)\,p^nz^n.$$

Но общий член ряда, получающегося из дроби

$$\frac{a}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

или

$$\frac{a-2apz\cos\varphi+ap^2z^2}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2},$$

равен

$$\frac{a \sin (n+1) \varphi}{\sin \varphi} p^n z^n.$$

Сложим эти дроби, и пусть

$$a+f=\mathfrak{A},$$

$$2a \cos \varphi + 2f \cos \varphi - 2g \sin \varphi = -\mathfrak{B}$$

и

$$a+f \cos 2\varphi - g \sin 2\varphi = 0;$$

тогда будет

$$g=\frac{\mathfrak{B}+2\mathfrak{A}\cos\varphi}{2\sin\varphi},$$

$$a=\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{1-\cos 2\varphi}=\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{2(\sin\varphi)^2}$$

и

$$f=\frac{-\mathfrak{A}\cos 2\varphi-\mathfrak{B}\cos\varphi}{2(\sin\varphi)^2},$$

$$g=\frac{\mathfrak{B}\sin\varphi+\mathfrak{A}\sin 2\varphi}{2(\sin\varphi)^2}.$$

Поэтому общий член ряда, полученного из дроби

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2},$$

будет

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi}{2(\sin\varphi)^3}\sin(n+1)\varphi\cdot p^nz^n+$$

$$+(n+1)\frac{\mathfrak{B}\sin\varphi\sin n\varphi+\mathfrak{A}\sin 2\varphi\sin n\varphi-\mathfrak{B}\cos\varphi\cos n\varphi-\mathfrak{A}\cos 2\varphi\cos n\varphi}{2(\sin\varphi)^2}p^nz^n=$$

$$=-\frac{(n+1)[\mathfrak{A}\cos(n+2)\varphi+\mathfrak{B}\cos(n+1)\varphi]}{2(\sin\varphi)^2}p^nz^n+\frac{(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}\cos\varphi)\sin(n+1)\varphi}{2(\sin\varphi)^3}p^nz^n=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(n+3)\sin(n+1)\varphi-\frac{1}{2}(n+1)\sin(n+3)\varphi}{2(\sin\varphi)^3}\mathfrak{A}p^nz^n+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}(n+2)\sin n\varphi-\frac{1}{2}n\sin(n+2)\varphi}{2(\sin\varphi)^3}\mathfrak{B}p^nz^n.$$

Итак, искомым общим членом ряда, получающегося из дроби

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2},$$

будет

$$\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi-(n+1)\sin(n+3)\varphi}{4(\sin\varphi)^3}\mathfrak{A}p^nz^n+\frac{(n+2)\sin n\varphi-n\sin(n+2)\varphi}{4(\sin\varphi)^3}\mathfrak{B}p^nz^n.$$

221. Пусть $k=3$; общий член ряда, возникающего из дроби

$$\frac{f-3pz(f\cos\varphi-g\sin\varphi)+3p^2z^2(f\cos 2\varphi-g\sin 2\varphi)-p^3z^3(f\cos 3\varphi-g\sin 3\varphi)}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^3},$$

будет

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}(f\cos n\varphi+g\sin n\varphi)p^nz^n.$$

Затем общий член ряда, возникающего из дроби

$$\frac{a+bpz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2},$$

т. е. из дроби

$$\frac{\begin{array}{l}a-2apz\cos\varphi+ap^2z^2\\ \quad+bpz\qquad -2bp^2z^2\cos\varphi+bp^3z^3\end{array}}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2},$$

будет

$$\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi-(n+1)\sin(n+3)\varphi}{4(\sin\varphi)^3}ap^nz^n+\frac{(n+2)\sin n\varphi-n\sin(n+2)\varphi}{4(\sin\varphi)^3}bp^nz^n.$$

Сложим эти дроби, и пусть числитель равен $\mathfrak{A}$; тогда

$$a+f=\mathfrak{A},$$
$$3f\cos\varphi-3g\sin\varphi+2a\cos\varphi-b=0,$$
$$3f\cos 2\varphi-3g\sin 2\varphi+a-2b\cos\varphi=0$$

и

$$b=f\cos 3\varphi-g\sin 3\varphi;$$

отсюда

$$a=\frac{f\cos 3\varphi-g\sin 3\varphi-3f\cos\varphi+3g\sin\varphi}{2\cos\varphi}=2g(\sin\varphi)^2\operatorname{tg}\varphi-f-2f(\sin\varphi)^2.$$

Затем находим

$$\frac{f}{g}=\frac{\sin 5\varphi-2\sin 3\varphi+\sin\varphi}{\cos 5\varphi-2\cos 3\varphi+\cos\varphi}$$

и

$$a+f=\mathfrak{A}=2g(\sin\varphi)^2\operatorname{tg}\varphi-2f(\sin\varphi)^2;$$

значит,

$$\frac{\mathfrak{A}}{2(\sin\varphi)^2}=\frac{g\sin\varphi-f\cos\varphi}{\cos\varphi},$$

откуда, наконец, получается

$$f=\frac{\mathfrak{A}(\sin\varphi-2\sin 3\varphi+\sin 5\varphi)}{16(\sin\varphi)^5},$$
$$g=\frac{\mathfrak{A}(\cos\varphi-2\cos 3\varphi+\cos 5\varphi)}{16(\sin\varphi)^5}.$$

Так как

$$16(\sin\varphi)^5=\sin 5\varphi-5\sin 3\varphi+10\sin\varphi.$$

то

$$a=\frac{\mathfrak{A}(9\sin\varphi-3\sin 3\varphi)}{16(\sin\varphi)^5}$$

и

$$b=\frac{\mathfrak{A}(-\sin 2\varphi+\sin 2\varphi)}{16(\sin\varphi)^5}=0,$$

но

$$3\sin\varphi-\sin 3\varphi=4(\sin\varphi)^3,$$

значит,

$$a=\frac{3\mathfrak{A}}{4(\sin\varphi)^2}.$$

Таким образом, общий член будет

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\mathfrak{A}p^nz^n\frac{\sin(n+1)\varphi-2\sin(n+3)\varphi+\sin(n+5)\varphi}{16(\sin\varphi)^5}+$$

$$+3\mathfrak{A}p^nz^n\frac{(n+3)\sin(n+1)\varphi-(n+1)\sin(n+3)\varphi}{16(\sin\varphi)^5}=$$

$$=\frac{\mathfrak{A}p^nz^n}{16(\sin\varphi)^5}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(n+4)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+1)\varphi-\dfrac{2(n+1)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+3)\varphi+\\ \qquad+\dfrac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\sin(n+5)\varphi.\end{array}\right\}$$

222. Итак, общий член ряда, который получается из дроби

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^3},$$

будет

$$\frac{\mathfrak{A}p^nz^n}{16(\sin\varphi)^5}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(n+5)(n+4)}{1\cdot 2}\sin(n+1)\varphi-\dfrac{2(n+1)(n+5)}{1\cdot 2}\sin(n+3)\varphi+\\ \qquad+\dfrac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\sin(n+5)\varphi\end{array}\right\}+$$

$$+\frac{\mathfrak{B}p^nz^n}{16(\sin\varphi)^5}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(n+4)(n+3)}{1\cdot 2}\sin n\varphi-\dfrac{2n(n+4)}{1\cdot 2}\sin(n+2)\varphi+\\ \qquad+\dfrac{n(n+1)}{1\cdot 2}\sin(n+4)\varphi.\end{array}\right\}$$

Идя еще дальше, в качестве общего члена ряда, получающегося из дроби

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^4},$$

находим

$$\frac{\mathfrak{A}p^nz^n}{64(\sin\varphi)^7}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(n+7)(n+6)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+1)\varphi-\\ -\dfrac{3(n+1)(n+7)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+3)\varphi+\\ +\dfrac{3(n+1)(n+2)(n+7)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+5)\varphi-\\ -\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+7)\varphi\end{array}\right\}+$$

$$+\frac{\mathfrak{B}p^nz^n}{64(\sin\varphi)^7}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(n+6)(n+5)(n+4)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin n\varphi-\dfrac{3n(n+6)(n+5)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+2)\varphi+\\ +\dfrac{3n(n+1)(n+6)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+4)\varphi-\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sin(n+6)\varphi\end{array}\right\}.$$

Из этих выражений легко понять, какие формы общих членов будут последовательно получаться для дальнейших степеней. Для более глубокого изучения природы этих выражений следует заметить [1]), что

$$\sin\varphi = \sin\varphi,$$
$$4(\sin\varphi)^3 = 3\sin\varphi - \sin 3\varphi,$$
$$16(\sin\varphi)^5 = 10\sin\varphi - 5\sin 3\varphi + \sin 5\varphi,$$
$$64(\sin\varphi)^7 = 35\sin\varphi - 21\sin 3\varphi + 7\sin 5\varphi - \sin 7\varphi,$$
$$256(\sin\varphi)^9 = 126\sin\varphi - 84\sin 3\varphi + 36\sin 5\varphi - 9\sin 7\varphi + \sin 9\varphi$$

и т. д.

223. Так как этим путем все дробные функции можно разложить на действительные частные дроби, то вместе с тем общие члены всех рекуррентных рядов могут быть представлены действительными выражениями. Для большей наглядности прилагаются нижеследующие примеры.

ПРИМЕР 1

Из дроби

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)} = \frac{1}{1-z-z^2+z^4+z^5-z^6}$$

получается рекуррентный ряд

$$1+z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+7z^6+8z^7+10z^8+12z^9+ \text{ и т. д.}$$

Требуется найти общий его член.

Данная дробь после разложения на множители будет равна

$$\frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+z^2)};$$

она разлагается на дроби

$$\frac{1}{6(1-z)^3}+\frac{1}{4(1-z)^2}+\frac{17}{72(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{2+z}{9(1+z+z^2)}.$$

Первая из них $\frac{1}{6(1-z)^3}$ дает общий член

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{6}z^n = \frac{n^2+3n+2}{12}z^n;$$

вторая $\frac{1}{4(1-z)^2}$ дает

$$\frac{n+1}{4}z^n;$$

третья $\frac{17}{72(1-z)}$ дает

$$\frac{17}{72}z^n;$$

четвертая $\frac{1}{8(1+z)}$ дает

$$\frac{1}{8}(-1)^n z^n.$$

Пятая же $\frac{2+z}{9(1+z+z^2)}$, при сравнении с выражением

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$$

---

[1]) Ср. § 262. [*Ф. Р.*]

(§ 218), дает

$$p=-1,\quad \varphi=\frac{\pi}{3}=60^\circ,\qquad \mathfrak{A}=+\frac{2}{9}\quad\text{и}\quad \mathfrak{B}=-\frac{1}{9}.$$

Отсюда получается общий член

$$\frac{2\sin(n+1)\varphi-\sin n\varphi}{9\sin\varphi}(-1)^n z^n=\frac{4\sin(n+1)\varphi-2\sin n\varphi}{9\sqrt{3}}(-1)^n z^n=$$
$$=\frac{4\sin\frac{(n+1)\pi}{3}-2\sin\frac{n\pi}{3}}{9\sqrt{3}}(-1)^n z^n.$$

Если соединить все эти выражения в одну общую сумму, то получится, что искомый общий член данного ряда равен

$$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{47}{72}\right)z^n\pm\frac{1}{8}z^n\pm\frac{4\sin\frac{(n+1)\pi}{3}-2\sin\frac{n\pi}{3}}{9\sqrt{3}}z^n,$$

причем имеют место верхние знаки, если n — число четное, и нижние, если n — нечетное. Здесь надо заметить, что когда n будет числом вида $3m$, то

$$\frac{4\sin\frac{(n+1)\pi}{3}-2\sin\frac{n\pi}{3}}{9\sqrt{3}}=\pm\frac{2}{9};$$

если $n=3m+1$ или $n=3m+2$, то это выражение равно $\mp\frac{1}{9}$, смотря по тому, будет ли n числом четным или нечетным. Отсюда природу ряда можно представить так:

если	то общий член будет
$n=6m+0,$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+1\right)z^n,$
$n=6m+1,$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{5}{12}\right)z^n,$
$n=6m+2,$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{2}{3}\right)z^n,$
$n=6m+3,$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{3}{4}\right)z^n,$
$n=6m+4,$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{2}{3}\right)z^n,$
$n=6m+5,$	$\left(\frac{n^2}{12}+\frac{n}{2}+\frac{5}{12}\right)z^n.$

Так, если $n=50$, то имеем $n=6m+2$, и член ряда будет равен $234z^{50}$.

ПРИМЕР 2

Из дроби

$$\frac{1+z+z^2}{1-z-z^4+z^5}$$

получается рекуррентный ряд

$$1+2z+3z^2+3z^3+4z^4+5z^5+6z^6+6z^7+7z^8+\text{ и т. д.}$$

Надо найти общий его член.

Данная дробь приводится к виду

$$\frac{1+z+z^2}{(1-z)^2(1+z)(1+z^2)},$$

и, таким образом, разлагается на следующие частные дроби:

$$\frac{3}{4(1-z)^2}+\frac{3}{8(1-z)}+\frac{1}{8(1+z)}+\frac{-1+z}{4(1+z^2)}.$$

Первая из них $\frac{3}{4(1-z)^2}$ дает общий член

$$\frac{3(n+1)}{4}z^n;$$

вторая $\frac{3}{8(1-z)}$ дает

$$\frac{3}{8}z^n;$$

третья $\frac{1}{8(1+z)}$ дает

$$\frac{1}{8}(-1)^n z^n$$

и четвертая $\frac{-1+z}{4(1+z^2)}$, при сравнении с выражением

$$\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2},$$

дает

$$p=1,\ \cos\varphi=0 \text{ и } \varphi=\frac{\pi}{2},\ \mathfrak{A}=-\frac{1}{4},\ \mathfrak{B}=+\frac{1}{4};$$

отсюда соответствующий общий член равен

$$\left[-\frac{1}{4}\sin\frac{(n+1)\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{n\pi}{2}\right]z^n.$$

Соединив все это вместе, получим, что искомый общий член равен:

$$\left(\frac{3}{4}n+\frac{9}{8}\right)z^n \pm \frac{1}{8}z^n-\frac{1}{4}\left[\sin\frac{(n+1)\pi}{2}-\sin\frac{n\pi}{2}\right]z^n.$$

Отсюда

если	то общий член будет
$n=4m+0$,	$\left(\frac{3}{4}n+1\right)z^n$,
$n=4m+1$,	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{5}{4}\right)z^n$,
$n=4m+2$,	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{3}{2}\right)z^n$,
$n=4m+3$,	$\left(\frac{3}{4}n+\frac{3}{4}\right)z^n$.

Так, если $n=50$, то будет $n=4m+2$, и этот член будет равен $39z^{50}$.

224. Когда дан рекуррентный ряд, то его общий член найдется по указанным правилам, так как легко узнать дробь, из которой он получается. По закону же рекуррентного ряда, согласно которому

любой член определяется по предыдущим, тотчас же выясняется знаменатель дроби, и множители его указывают форму общего члена, тогда как из числителя определяются лишь его коэффициенты. Пусть дан рекуррентный ряд

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+ \text{ и т. д.},$$

и пусть закон последовательности этого ряда, по которому любой член определяется по нескольким предыдущим, приводит к такому знаменателю дроби:

$$1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3,$$

так что

$$D=\alpha C+\beta B-\gamma A \quad E=\alpha D+\beta C+\gamma B, \quad F=\alpha E+\beta D+\gamma C \text{ и т. д.}$$

Множители $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$ по выражению Моавра образуют *шкалу отношения* [43]. Таким образом, закон последовательности заключается в шкале отношения, а шкала отношения тотчас же дает знаменатель дроби, при развертывании которой получается данный рекуррентный ряд.

225. Для нахождения общего члена, иначе коэффициента неопределенной степени z^n, надо найти как простые, так и двойные, если хотим избежать мнимых, множители знаменателя $1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3$. Сначала примем, что все множители не равные между собой и действительные:

$$(1-pz)(1-qz)(1-rz);$$

тогда дробь, производящая данный ряд, разложится на

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}+\frac{\mathfrak{B}}{1-qz}+\frac{\mathfrak{C}}{1-rz};$$

следовательно, общий член ряда будет

$$(\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n)z^n.$$

Если два множителя будут равны, например $q=p$, то общий член будет

$$[(\mathfrak{A}(n+1)+\mathfrak{B})p^n+\mathfrak{C}r^n]z^n;$$

если же, сверх того, $r=q=p$, то общий член будет

$$\left(\mathfrak{A}\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}+\mathfrak{B}(n+1)+\mathfrak{C}\right)p^nz^n \text{ [44]}$$

Если же знаменатель $1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3$ будет иметь двойной множитель, так что он равен

$$(1-pz)(1-2qz\cos\varphi+q^2z^2),$$

то общий член будет равен

$$\left(\mathfrak{A}p^n+\frac{\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{C}\sin n\varphi}{\sin\varphi}q^n\right)z^n.$$

Если вместо n подставлять последовательно числа 0, 1, 2, то должны получиться члены A, Bz, Cz^2; отсюда определятся значения букв $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

226[1]). Если шкала отношения будет двучленной, т. е. каждый член будет определяться по двум предыдущим, так что

$$C = \alpha B - \beta A,\ D = \alpha C - \beta B,\ E = \alpha D - \beta C \text{ и т. д.},$$

то ясно, что рекуррентный ряд

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + \text{ и т. д.}$$

получается из дроби со знаменателем

$$1 - \alpha z + \beta z^2.$$

Пусть множители этого знаменателя будут

$$(1 - pz)(1 - qz);$$

тогда

$$p + q = \alpha \quad \text{и} \quad pq = \beta;$$

при этом общий член ряда будет

$$(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n)\, z^n.$$

Отсюда при $n = 0$ будет

$$A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B},$$

а при $n = 1$

$$B = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q,$$

откуда

$$Aq - B = \mathfrak{A}(q - p),$$

$$\mathfrak{A} = \frac{Aq - B}{q - p} \text{ и } \mathfrak{B} = \frac{Ap - B}{p - q}.$$

Когда найдены значения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то получится

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n \text{ и } Q = \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1};$$

вместе с тем

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{B^2 - \alpha AB + \beta A^2}{4\beta - \alpha^2}.$$

227. Отсюда можно вывести способ образования любого члена по одному только предыдущему, в то время как для этой цели по закону последовательности требовались два. Так как

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n \text{ и } Q = \mathfrak{A}p \cdot p^n + \mathfrak{B}q \cdot q^n,$$

то будет

$$Pq - Q = \mathfrak{A}(q - p)\, p^n \text{ и } Pp - Q = \mathfrak{B}(p - q)\, q^n.$$

Перемножая эти выражения между собой, получим

$$P^2pq - (p + q)\, PQ + Q^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(p - q)^2\, p^nq^n = 0.$$

[1]) К § 226—230 см. вступительную статью А. Шпайзера, стр. 10.

Но

$$p+q=\alpha,\ pq=\beta,\ (p-q)^2=(p+q)^2-4pq=\alpha^2-4\beta \text{ и } p^nq^n=\beta^n.$$

Подставляя это, найдем

$$\beta P^2-\alpha PQ+Q^2=(\beta A^2-\alpha AB+B^2)\beta^n$$

или

$$\frac{Q^2-\alpha PQ+\beta P^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}=\beta^n.$$

Это составляет замечательное свойство таких рекуррентных рядов, у которых любой член определяется по двум предыдущим. Если известен какой-либо член P, то следующий будет

$$Q=\frac{1}{2}\alpha P+\sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2-\beta\right)P^2+(B^2-\alpha AB+\beta A^2)\beta^n};$$

выражение это хотя и имеет вид иррациональности, однако всегда рационально, потому что иррациональные члены в ряде не встречаются.

228. Далее, по каким-либо двум данным смежным членам Pz^n и Qz^{n+1} можно удобным способом найти гораздо более отдаленный член Xz^{2n}. Действительно, положим

$$X=fP^2+gPQ-h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n.$$

Так как

$$P=\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n$$

и

$$Q=\mathfrak{A}p\cdot p^n+\mathfrak{B}q\cdot q^n,$$

а

$$X=\mathfrak{A}p^{2n}+\mathfrak{B}q^{2n},$$

то получится следующее:

$$\begin{array}{rcl} fP^2 &=& f\mathfrak{A}^2p^{2n} \quad +f\mathfrak{B}^2q^{2n} \quad +2f\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n\\ gPQ &=& g\mathfrak{A}^2p\cdot p^{2n}+g\mathfrak{B}^2q\cdot q^{2n}+g\mathfrak{A}\mathfrak{B}\alpha\beta^n\\ -h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n &=& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n\\ \hline & & X=\mathfrak{A}p^{2n}+\mathfrak{B}q^{2n} \end{array},$$

и, значит,

$$f+gp=\frac{1}{\mathfrak{A}},\quad f+gq=\frac{1}{\mathfrak{B}} \text{ и } h=2f+g\alpha,$$

откуда

$$g=\frac{\mathfrak{B}-\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)} \text{ и } f=\frac{\mathfrak{A}p-\mathfrak{B}q}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)}.$$

Но

$$\mathfrak{B}-\mathfrak{A}=\frac{\alpha A-2B}{p-q},\quad \mathfrak{A}p-\mathfrak{B}q=\frac{\alpha B-2A\beta}{p-q},$$

следовательно,

$$f=\frac{\alpha B-2A\beta}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2-4\beta)} \text{ и } g=\frac{\alpha A-2B}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\alpha^2-4\beta)}$$

или

$$f=\frac{2A\beta-\alpha B}{B^2-\alpha AB+\beta A^2} \text{ и } g=\frac{2B-\alpha A}{B^2-\alpha AB+\beta A^2},$$

поэтому

$$h=\frac{(4\beta-\alpha^2)A}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}.$$

Следовательно,

$$X=\frac{(2A\beta-\alpha B)P^2+(2B-\alpha A)PQ}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}-A\beta^n.$$

Подобным же образом находим

$$X=\frac{[\alpha\beta A-(\alpha^2-2\beta)B]P^2+(2B-\alpha A)Q^2}{\alpha(B^2-\alpha AB+\beta A^2)}-\frac{2B\beta^n}{\alpha}.$$

Соединив эти выражения и исключив член β^n, находим

$$X=\frac{(\beta A-\alpha B)P^2+2BPQ-AQ^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}\ [45].$$

229. Подобным же образом, если требуется найти дальнейшие члены $A+Bz+Cz^2+\ldots+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+\ldots+Xz^{2n}+Yz^{2n+1}+Zz^{2n+2}+$ и т. д., то будем иметь

$$Z=\frac{(\beta A-\alpha B)Q^2+2BQR-AR^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2},$$

и так как $R=\alpha Q-\beta P$, то

$$Z=\frac{-\beta^2AP^2+2\beta(\alpha A-B)PQ+[\alpha B-(\alpha^2-\beta)A]Q^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}.$$

Но $Z=\alpha Y-\beta X$ и, значит, $Y=\frac{Z+\beta X}{\alpha}$; отсюда

$$Y=\frac{-\beta BP^2+2\beta APQ+(B-\alpha A)Q^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}.$$

Итак, подобным же образом по X и Y можно определить коэффициенты степеней z^{4n} и z^{4n+1}; отсюда коэффициенты z^{8n}; z^{8n+1} и т. д.

ПРИМЕР

Пусть дан рекуррентный ряд

$$1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+\ldots+Pz^n+Qz^{n+1}+ \text{ и т. д.};$$

так как любой его коэффициент равен сумме двух предыдущих, то знаменатель дроби, производящей этот ряд, будет

$$1-z-z^2;$$

следовательно,

$$\alpha=1,\ \beta=-1 \text{ и } A=1,\ B=3$$

и, значит,

$$B^2-\alpha AB+\beta A^2=5.$$

Отсюда получается

$$Q=\frac{P+\sqrt{5P^2+20(-1)^n}}{2}=\frac{P+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2},$$

где имеет место верхний знак, когда n — число четное, и нижний, когда n — нечетное. Так, если $n=4$, то $P=11$ и

$$Q=\frac{11+\sqrt{5\cdot 121+20}}{2}=\frac{11+25}{2}=18.$$

Если, далее, коэффициент члена z^{2n} будет X, то

$$X=\frac{-4P^2+6PQ-Q^2}{5},$$

значит, коэффициент степени z^8 будет равен

$$\frac{-4\cdot 121+6\cdot 198-324}{5}=76.$$

Так как

$$Q=\frac{P+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2},$$

то

$$Q^2=\frac{3P^2\pm 10+P\sqrt{5P^2\pm 20}}{2};$$

поэтому

$$X=\frac{-P^2\mp 2+P\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}.$$

Итак, из любого члена Pz^n ряда получаются такие:

$$\frac{P+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}z^{n+1} \quad \text{и} \quad \frac{-P^2\mp 2+P\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}z^{2n}.$$

230. Подобным же образом в рекуррентных рядах, у которых любой член определяется по трем предыдущим, можно какой угодно член определить по двум предыдущим. Пусть таким рекуррентным рядом будет

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots+Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+ \text{ и т. д.}$$

со шкалой отношения α, $-\beta$, $+\gamma$, так что этот ряд получается из дроби со знаменателем, равным

$$1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3.$$

Выражая члены P, Q, R таким же образом, как и выше, при помощи множителей

$$(1-pz)(1-qz)(1-rz)$$

знаменателя, имеем

$$P=\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n,$$
$$Q=\mathfrak{A}p\cdot p^n+\mathfrak{B}q\cdot q^n+\mathfrak{C}r\cdot r^n$$

и

$$R=\mathfrak{A}p^2\cdot p^n+\mathfrak{B}q^2\cdot q^n+\mathfrak{C}r^2\cdot r^n;$$

но

$$p+q+r=\alpha,\quad pq+pr+qr=\beta \text{ и } pqr=\gamma,$$

поэтому получится такая пропорция [46]:

$$
R^3 \left.\begin{matrix}-2\alpha Q\\ +\beta P\end{matrix}\right\} R^2 \left.\begin{matrix}+(\alpha^2+\beta)Q^2\\ -(\alpha\beta+3\gamma)PQ\\ +\alpha\gamma P^2\end{matrix}\right\} R \left.\begin{matrix}-(\alpha\beta-\gamma)Q^3\\ +(\alpha\gamma+\beta^2)PQ^2\\ -2\beta\gamma P^2Q\\ +\gamma^2P^3\end{matrix}\right\} :\gamma^n =
$$

$$
= C^3 \left.\begin{matrix}-2\alpha B\\ +\beta A\end{matrix}\right\} C^2 \left.\begin{matrix}+(\alpha^2+\beta)B^2\\ -(\alpha\beta+3\gamma)AB\\ +\alpha\gamma A^2\end{matrix}\right\} C \left.\begin{matrix}-(\alpha\beta-\gamma)B^3\\ +(\alpha\gamma+\beta^2)AB^2\\ -2\beta\gamma A^2B\\ +\gamma^2A^3\end{matrix}\right\} :1.
$$

Таким образом, нахождение члена R по двум предыдущим P и Q зависит от решения уравнения третьей степени.

231. После этих замечаний относительно общих членов рекуррентных рядов остается определить суммы этих рядов. Прежде всего ясно, что сумма рекуррентного ряда при продолжении до бесконечности равна дроби, из которой ряд получается; так как знаменатель этой дроби определяется из самого закона последовательности, то остается только определить числитель. Пусть дан ряд

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \text{ и т. д.},$$

закон последовательности которого дает знаменатель

$$1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4.$$

Пусть дробь, равная сумме продолженного до бесконечности ряда, будет равна

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4};$$

из нее должен получиться данный ряд; поэтому сравнение дает

$$
\begin{aligned}
a &= A,\\
b &= B - \alpha A,\\
c &= C - \alpha B + \beta A,\\
d &= D - \alpha C + \beta B - \gamma A.
\end{aligned}
$$

Отсюда искомой суммой будет

$$\frac{A + (B - \alpha A)z + (C - \alpha B + \beta A)z^2 + (D - \alpha C + \beta B - \gamma A)z^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} \text{ [47]}.$$

232. Теперь легко видеть, каким образом следует находить сумму рекуррентного ряда вплоть до наперед указанного члена. Пусть, например, требуется найти сумму только что взятого ряда вплоть до члена Pz^n; положим

$$s = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots + Pz^n.$$

Так как сумма этого ряда, продолженного до бесконечности, известна, то надо найти сумму членов, следующих за Pz^n до бесконечности; пусть она будет

$$t = Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + Tz^{n+4} + \text{ и т. д.}$$

Этот ряд после деления на z^{n+1} даст рекуррентный ряд, равный данному [48], и сумма его поэтому будет

$$t=\frac{Qz^{n+1}+(R-\alpha Q)\,z^{n+2}+(S-\alpha R+\beta Q)\,z^{n+3}+(T-\alpha S+\beta R-\gamma Q)z^{n+4}}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

Отсюда получается искомая сумма

$$s=\frac{A+(B-\alpha A)\,z+(C-\alpha B+\beta A)z^2+(D-\alpha C+\beta B-\gamma A)\,z^3}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}-$$
$$-\frac{Qz^{n+1}+(R-\alpha Q)\,z^{n+2}+(S-\alpha R+\beta Q)\,z^{n+3}+(T-\alpha S+\beta R-\gamma Q)\,z^{n+4}}{1-\alpha z+\beta z^2-\gamma z^3+\delta z^4}.$$

233. Если шкала отношения будет двучленной: α, $-\beta$, то сумма ряда

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ldots+Pz^n,$$

получающегося из дроби

$$\frac{A+(B-\alpha A)\,z}{1-\alpha z+\beta z^2},$$

будет

$$\frac{A+(B-\alpha A)\,z-Qz^{n+1}-(R-\alpha Q)\,z^{n+2}}{1-\alpha z+\beta z^2}.$$

Но по природе ряда

$$R=\alpha Q-\beta P;$$

отсюда получается для суммы значение

$$\frac{A+(B-\alpha A)\,z-Qz^{n+1}+\beta Pz^{n+2}}{1-\alpha z+\beta z^2}.$$

ПРИМЕР

Пусть дан ряд

$$1+3z+4z^2+7z^3+\ldots+Pz^n,$$

где

$$\alpha=1,\quad \beta=-1,\quad A=1,\quad B=3;$$

сумма его будет

$$\frac{1+2z-Qz^{n+1}-Pz^{n+2}}{1-z-z^2}.$$

Если же положить $z=1$, то сумма ряда

$$1+3+4+7+11+\ldots+P=P+Q-3.$$

Значит, сумма последнего и следующего за ним членов превышает на три сумму ряда. Но так как

$$Q=\frac{P+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2},$$

то сумма ряда

$$1+3+4+7+11+\ldots+P=\frac{3P-6+\sqrt{5P^2\pm 20}}{2}.$$

Итак, по одному последнему члену можно найти сумму ряда.

ГЛАВА XIV
ОБ УМНОЖЕНИИ И ДЕЛЕНИИ УГЛОВ

234. Пусть в круге, радиус которого равен единице, какой-либо угол или дуга будет равен z, синус его равен x, косинус равен y и тангенс равен t; тогда

$$x^2+y^2=1 \quad \text{и} \quad t=\frac{x}{y}.$$

Выше мы видели, что как синусы, так и косинусы углов z, $2z$, $3z$, $4z$, $5z$ и т. д. составляют рекуррентный ряд со шкалой отношения[1]) $2y$, -1; прежде всего получаем для синусов этих дуг такие выражения:

$$\begin{aligned}
\sin 0z &= 0,\\
\sin 1z &= x,\\
\sin 2z &= 2xy,\\
\sin 3z &= 4xy^2-x,\\
\sin 4z &= 8xy^3-4xy,\\
\sin 5z &= 16xy^4-12xy^2+x,\\
\sin 6z &= 32xy^5-32xy^3+6xy,\\
\sin 7z &= 64xy^6-80xy^4+24xy^2-x,\\
\sin 8z &= 128xy^7-192xy^5+80xy^3-8xy.
\end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\sin nz = x\left\{\begin{array}{c}
2^{n-1}y^{n-1}-(n-2)\,2^{n-3}y^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}\,2^{n-5}y^{n-5}-\\
-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\,2^{n-7}y^{n-7}+\\
+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,2^{n-9}y^{n-9}-\text{ и т. д.}
\end{array}\right\}.$$

235. Если положим дугу $nz=s$, то будет

$$\sin nz=\sin s=\sin(\pi-s)=\sin(2\pi+s)=\sin(3\pi-s) \text{ и т. д.},$$

так как все эти синусы между собою равны. Отсюда получаем для x много значений, именно:

$$\sin\frac{s}{n},\quad \sin\frac{\pi-s}{n},\quad \sin\frac{2\pi+s}{n},\quad \sin\frac{3\pi-s}{n},\quad \sin\frac{4\pi+s}{n} \text{ и т. д.};$$

[1]) Определение этого термина см. в § 224. [*И. П.*]

следовательно, все они в одинаковой мере удовлетворяют найденному равенству. Для x получится столько различных значений, сколько число n содержит единиц; эти значения поэтому будут корнями найденного уравнения. Надо только остерегаться принимать за корни уравнения одинаковые значения; для этой цели надо брать полученные выражения через одно. После того как корни уравнения стали известны, сравнение их с членами уравнения приводит к открытию достойных внимания свойств. Так как для этой цели нужно только уравнение с одним неизвестным x, то для y надо подставить его значение $\sqrt{1-x^2}$; поэтому придется проделать двоякого рода действия в зависимости от того, будет ли n числом четным или нечетным.

236. Пусть n будет нечетным числом; так как разность дуг $-z$, $+z$, $+3z$, $+5z$ и т. д. есть $2z$, а ее косинус равен $1-2x^2$, то шкала отношения последовательности синусов будет $2-4x^2$, -1; отсюда

$$\begin{aligned}
\sin(-z) &= -x,\\
\sin z &= x,\\
\sin 3z &= 3x-4x^3,\\
\sin 5z &= 5x-20x^3+16x^5,\\
\sin 7z &= 7x-56x^3+112x^5-64x^7,\\
\sin 9z &= 9x-120x^3+432x^5-576x^7+256x^9;
\end{aligned}$$

стало быть,

$$\sin nz = nx - \frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}x^7 + \text{ и т. д.},$$

если только n будет числом нечетным. Корнями этого уравнения являются

$$\sin z,\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{8\pi}{n}+z\right) \text{ и т. д.};$$

число их есть n.

237. Следовательно, множителями уравнения

$$0 = 1 - \frac{nx}{\sin nz} + \frac{n(n^2-1)x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \sin nz} - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\sin nz} + \ldots \pm \frac{2^{n-1}x^n}{\sin nz}$$

(где имеет место верхний знак, если n на единицу меньше числа, кратного четырем, и нижний — в противном случае) будут

$$\left(1-\frac{x}{\sin z}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)}\right) \text{ и т. д.};$$

отсюда выводим, что

$$\frac{n}{\sin nz} = \frac{1}{\sin z} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)} + \text{ и т. д.},$$

до тех пор, пока не будем иметь n членов. Тогда произведение всех их будет

$$\mp\frac{2^{n-1}}{\sin nz}=\frac{1}{\sin z\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)\text{ и т. д.}}$$

или

$$\sin nz=\mp 2^{n-1}\sin z\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)\text{ и т. д.}$$

Так как недостает предпоследнего члена, то

$$0=\sin z+\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{n}+z\right)+\text{ и т. д. [49].}$$

ПРИМЕР 1

Если $n=3$, то получатся равенства

$$0=\sin z+\sin(120^\circ+z)+\sin(240^\circ+z)=\sin z+\sin(60^\circ-z)-\sin(60^\circ+z),$$

$$\frac{3}{\sin 3z}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin(120^\circ+z)}+\frac{1}{\sin(240^\circ+z)}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin(60^\circ-z)}-\frac{1}{\sin(60^\circ+z)},$$

$$\sin 3z=-4\sin z\sin(120^\circ+z)\sin(240^\circ+z)=4\sin z\sin(60^\circ-z)\sin(60^\circ+z).$$

Итак, как мы уже и выше заметили, будет

$$\sin(60^\circ+z)=\sin z+\sin(60^\circ-z)$$

и

$$3\operatorname{cosec}3z=\operatorname{cosec}z+\operatorname{cosec}(60^\circ-z)-\operatorname{cosec}(60^\circ+z).$$

ПРИМЕР 2

Положим $n=5$; при этом получатся такие уравнения:

$$0=\sin z+\sin\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{5}+z\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{5}\pi+z\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{5}\pi+z\right),$$

или

$$0=\sin z+\sin\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}-z\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}+z\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{5}-z\right),$$

или

$$0=\sin z+\sin\left(\frac{\pi}{5}-z\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}+z\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{5}-z\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{5}+z\right).$$

Затем будет

$$\frac{5}{\sin 5z}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{5}-z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{5}+z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}-z\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)},$$

$$\sin 5z=16\sin z\sin\left(\frac{\pi}{5}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{5}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5}+z\right).$$

ПРИМЕР 3

Таким же образом, полагая $n=2m+1$, получим

$$0=\sin z+\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)-\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)+$$
$$+\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)-\ldots\pm\sin\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)\mp\sin\left(\frac{m\pi}{n}+z\right),$$

где имеют место верхние знаки, если m число нечетное, и нижние, когда оно четное. Другое уравнение будет

$$\frac{n}{\sin nz}=\frac{1}{\sin z}+\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)}+$$
$$+\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}+\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)}-\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)}\mp\frac{1}{\sin\left(\frac{m\pi}{n}+z\right)};$$

его удобно выразить в косекансах. В-третьих, получится произведение

$$\sin nz=2^{2m}\sin z\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\times$$
$$\times\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)\ldots\sin\left(\frac{m\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{n}+z\right).$$

238. Пусть теперь n будет числом четным; так как

$$y=\sqrt{1-x^2}\quad\text{и}\quad\cos 2z=1-2x^2,$$

и, значит, шкала отношения последовательности синусов будет по-прежнему $2-4x^2$, -1, то

$$\begin{aligned}&\sin 0z=0,\\&\sin 2z=2x\sqrt{1-x^2},\\&\sin 4z=(4x-8x^3)\sqrt{1-x^2},\\&\sin 6z=(6x-32x^3+32x^5)\sqrt{1-x^2},\\&\sin 8z=(8x-80x^3+192x^5-128x^7)\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

и вообще

$$\sin nz=\left\{\begin{aligned}&nx-\frac{n(n^2-4)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5-\\&-\frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^7+\ldots\pm 2^{n-1}x^{n-1}\end{aligned}\right\}\sqrt{1-x^2},$$

где n означает какое угодно четное число.

239. Чтобы сделать это уравнение рациональным, возведем обе части в квадрат; получим такое уравнение:

$$(\sin nz)^2=n^2x^2+Px^4+Qx^6+\ldots-2^{2n-2}x^{2n}$$

или

$$x^{2n}-\ldots-\frac{n^2}{2^{2n-2}}x^2+\frac{1}{2^{2n-2}}(\sin nz)^2=0;$$

корни этого уравнения будут как положительными, так и отрицательными, именно:

$$\pm \sin z,\ \pm \sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right),\ \pm \sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right),\ \pm \sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right),$$
$$\pm \sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right) \text{ и т. д.,}$$

причем надо взять всего n таких выражений. Так как последний член является произведением всех этих корней, то, извлекая везде квадратный корень, находим

$$\sin nz = \pm 2^{n-1} \sin z \sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\ldots;$$

какой знак в этих случаях будет иметь место, надо решать в каждом случае отдельно.

ПРИМЕР

Если вместо n последовательно подставлять числа 2, 4, 6 и т. д. и взять n различных синусов, то будет

$$\sin 2z = 2\sin z \sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right),$$
$$\sin 4z = 8\sin z \sin\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{4}-z\right),$$
$$\sin 6z = 32\sin z \sin\left(\frac{\pi}{6}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{6}-z\right)\times$$
$$\times \sin\left(\frac{2\pi}{6}+z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{6}-z\right),$$
$$\sin 8z = 128\sin z \sin\left(\frac{\pi}{8}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{8}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{8}+z\right)\times$$
$$\times \sin\left(\frac{3\pi}{8}-z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8}+z\right)\sin\left(\frac{4\pi}{8}-z\right).$$

240. Ясно, что вообще для четного n будет

$$\sin nz = 2^{n-1}\sin z \sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\times$$
$$\times \sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right)\ldots\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right).$$

Сравнение этого выражения с найденным выше для случая нечетного n обнаруживает такое сходство, что оба случая можно соединить в один. Итак, будет ли n числом четным или нечетным,

$$\sin nz = 2^{n-1}\sin z \sin\left(\frac{\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{n}+z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)\times$$
$$\times \sin\left(\frac{3\pi}{n}-z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{n}+z\right) \text{ и т. д.,}$$

где берется столько множителей, сколько число n содержит единиц.

241. Эти выражения, посредством которых синусы кратных углов выражаются в виде сомножителей, могут принести немалую пользу при нахождении логарифмов синусов кратных углов, а также при получении

многих выражений синусов при помощи сомножителей, какие мы дали выше (§ 184). Так,

$$\sin z = 1 \sin z,$$
$$\sin 2z = 2 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$
$$\sin 3z = 4 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{3} - z\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + z\right),$$
$$\sin 4z = 8 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{4} - z\right),$$
$$\sin 5z = 16 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{5} - z\right)\sin\left(\frac{\pi}{5} + z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5} - z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{5} + z\right),$$
$$\sin 6z = 32 \sin z \sin\left(\frac{\pi}{6} - z\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{6} - z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{6} + z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{6} - z\right)$$

и т. д.

242. Так как, далее, $\frac{\sin 2nz}{\sin nz} = 2\cos nz$, то подобным же образом при помощи сомножителей выразятся косинусы кратных углов:

$$\cos z = 1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$
$$\cos 2z = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - z\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} + z\right),$$
$$\cos 3z = 4 \sin\left(\frac{\pi}{6} - z\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} + z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{6} - z\right),$$
$$\cos 4z = 8 \sin\left(\frac{\pi}{8} - z\right)\sin\left(\frac{\pi}{8} + z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8} - z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{8} + z\right),$$
$$\cos 5z = 16 \sin\left(\frac{\pi}{10} - z\right)\sin\left(\frac{\pi}{10} + z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10} - z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{10} + z\right)\sin\left(\frac{5\pi}{10} - z\right),$$

и вообще

$$\cos nz = 2^{n-1} \sin\left(\frac{\pi}{2n} - z\right)\sin\left(\frac{\pi}{2n} + z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} - z\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n} + z\right)\times$$
$$\times \sin\left(\frac{5\pi}{2n} - z\right)\sin\left(\frac{5\pi}{2n} + z\right) \text{ и т. д.},$$

где берется столько множителей, сколько число n содержит единиц.

243. Такие же выражения получатся из рассмотрения косинусов кратных дуг. Действительно, если $\cos z = y$, то будет [§ 129]

$$\cos 0z = 1,$$
$$\cos 1z = y,$$
$$\cos 2z = 2y^2 - 1,$$
$$\cos 3z = 4y^3 - 3y,$$
$$\cos 4z = 8y^4 - 8y^2 + 1,$$
$$\cos 5z = 16y^5 - 20y^3 + 5y,$$
$$\cos 6z = 32y^6 - 48y^4 + 18y^2 - 1,$$
$$\cos 7z = 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y$$

и вообще

$$\cos nz = 2^{n-1}y^n - \frac{n}{1}2^{n-3}y^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}2^{n-5}y^{n-4} -$$
$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}2^{n-7}y^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}2^{n-9}y^{n-8} - \text{и т. д.}$$ [50].

В силу равенства

$$\cos nz = \cos(2\pi - nz) = \cos(2\pi + nz) = \cos(4\pi \pm nz) = \cos(6\pi \pm nz) \quad \text{и т. д.}$$

получатся такие корни этого уравнения:

$$\cos z, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{n} \pm z\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{n} \pm z\right), \quad \cos\left(\frac{6\pi}{n} \pm z\right) \text{ и т. д.};$$

из этих выражений надо взять для y столько, сколько среди них есть различных, а их столько, сколько число n содержит единиц.

244. Прежде всего ясно, что ввиду отсутствия второго члена, за исключением случая $n = 1$, сумма всех этих корней будет равна нулю. Итак,

$$0 = \cos z + \cos\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} - z\right) +$$
$$+ \cos\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) + \text{ и т. д.},$$

где нужно взять столько членов, сколько число n содержит единиц. Это равенство, очевидно, верно, когда n — четное число, так как любой член уничтожается другим равным ему отрицательным. Поэтому рассмотрим числа нечетные, исключая единицу; так как

$$\cos v = -\cos(\pi - v),$$

то будет

$$0 = \cos z - \cos\left(\frac{\pi}{3} - z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + z\right),$$
$$0 = \cos z - \cos\left(\frac{\pi}{5} - z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{5} + z\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5} + z\right),$$
$$0 = \cos z - \cos\left(\frac{\pi}{7} - z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7} + z\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7} - z\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) -$$
$$- \cos\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7} + z\right),$$

и вообще, когда n есть какое-либо нечетное число, то

$$0 = \cos z - \cos\left(\frac{\pi}{n} - z\right) - \cos\left(\frac{\pi}{n} + z\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) -$$
$$- \cos\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} - z\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) - \text{и т. д.},$$

где нужно взять столько членов, сколько число n содержит единиц; при этом, как мы уже упоминали, n должно быть нечетным числом, превышающим единицу.

245. Что касается произведения всех членов, то получатся разные выражения, смотря по тому, будет ли n числом нечетным, нечетно-четным или четно-четным [51]; все эти случаи заключаются в общем выражении (§ 242), если отдельные синусы преобразовать в косинусы.

Именно, будет

$$\cos z = 1 \cos z,$$
$$\cos 2z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+z\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right),$$
$$\cos 3z = 4\cos\left(\frac{2\pi}{6}+z\right)\cos\left(\frac{2\pi}{6}-z\right)\cos z,$$
$$\cos 4z = 8\cos\left(\frac{3\pi}{8}+z\right)\cos\left(\frac{3\pi}{8}-z\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+z\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-z\right),$$
$$\cos 5z = 16\cos\left(\frac{4\pi}{10}+z\right)\cos\left(\frac{4\pi}{10}-z\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10}+z\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10}-z\right)\cos z,$$

и вообще

$$\cos nz = 2^{n-1}\cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi+z\right)\cos\left(\frac{n-1}{2n}\pi-z\right)\cos\left(\frac{n-3}{2n}\pi+z\right)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{n-3}{2n}\pi-z\right)\cos\left(\frac{n-5}{2n}\pi+z\right)\cos\left(\frac{n-5}{2n}\pi-z\right)\times$$
$$\times\cos\left(\frac{n-7}{2n}\pi+z\right)\cos\left(\frac{n-7}{2n}\pi-z\right) \text{ и т. д.},$$

где берется столько множителей, сколько число n содержит единиц.

246. Пусть n будет числом нечетным и пусть уравнение начинается с единицы; тогда

$$0 = 1 \mp \frac{ny}{\cos nz} \pm \text{ и т. д.},$$

где имеет место верхний знак, если n — число нечетное вида $4m+1$, и нижний, если $n = 4m-1$ [52]. Отсюда получаем

$$+\frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos z},$$
$$-\frac{3}{\cos 3z} = \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+z\right)},$$
$$+\frac{5}{\cos 5z} = \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}-z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{5}+z\right)} +$$
$$+\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}-z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)},$$

и вообще при $n = 2m+1$ будет

$$\frac{n}{\cos nz} = \frac{2m+1}{\cos(2m+1)z} = \frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\pi+z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{m}{n}\pi-z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{m-1}{n}\pi+z\right)} -$$
$$-\frac{1}{\cos\left(\frac{m-1}{n}\pi-z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{m-2}{n}\pi+z\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{m-2}{n}\pi-z\right)} -$$
$$-\frac{1}{\cos\left(\frac{m-3}{n}\pi+z\right)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{m-3}{n}\pi-z\right)} + \text{ и т. д.},$$

где берется столько членов, сколько число n содержит единиц.

247. Так как $\frac{1}{\cos v} = \sec v$, то отсюда выводятся замечательные свойства секансов; именно:

$$\sec z = \sec z,$$

$$3 \sec 3z = \sec\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + \sec\left(\frac{\pi}{3} - z\right) - \sec\left(\frac{0\pi}{3} + z\right),$$

$$5 \sec 5z = \sec\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + \sec\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) - \sec\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \sec\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + \sec\left(\frac{0\pi}{5} + z\right),$$

$$7 \sec 7z = \sec\left(\frac{3\pi}{7} + z\right) + \sec\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - \sec\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) - \sec\left(\frac{2\pi}{7} - z\right) + \sec\left(\frac{\pi}{7} + z\right) + \sec\left(\frac{\pi}{7} - z\right) - \sec\left(\frac{0\pi}{7} + z\right),$$

и вообще при $n = 2m + 1$ будет

$$n \sec nz = \sec\left(\frac{m}{n}\pi + z\right) + \sec\left(\frac{m}{n}\pi - z\right) - \sec\left(\frac{m-1}{n}\pi + z\right) - \sec\left(\frac{m-1}{n}\pi - z\right) + \sec\left(\frac{m-2}{n}\pi + z\right) + \sec\left(\frac{m-2}{n}\pi - z\right) - \sec\left(\frac{m-3}{n}\pi + z\right) - \sec\left(\frac{m-3}{n}\pi - z\right) + \sec\left(\frac{m-4}{n}\pi + z\right) + \sec\left(\frac{m-4}{n}\pi - z\right) - \ldots \pm \sec z.$$

248. Для косекансов же по § 237 находим

$$\operatorname{cosec} z = \operatorname{cosec} z,$$

$$3 \operatorname{cosec} 3z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{3} + z\right),$$

$$5 \operatorname{cosec} 5z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{5} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right),$$

$$7 \operatorname{cosec} 7z = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{7} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{7} + z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{7} - z\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{7} + z\right),$$

и вообще при $n = 2m + 1$ будет

$$n \operatorname{cosec} nz = \operatorname{cosec} z + \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{n} + z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) - \ldots \mp \operatorname{cosec}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right) \pm \operatorname{cosec}\left(\frac{m\pi}{n} + z\right),$$

где имеют место верхние знаки, если m число четное, и нижние, если m нечетное.

249. Поскольку, как мы видели выше [§ 133],

$$\cos nz \pm \sqrt{-1}\cdot\sin nz = (\cos nz \pm \sqrt{-1}\cdot\sin z)^n;$$

то

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\cdot\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\cdot\sin z)^n}{2},$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\cdot\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\cdot\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

и, стало быть,

$$\operatorname{tg} nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\cdot\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\cdot\sin z)^n}{(\cos z + \sqrt{-1}\cdot\sin z)^n\sqrt{-1} + (\cos z - \sqrt{-1}\cdot\sin z)^n\sqrt{-1}}.$$

Положим

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = t;$$

тогда

$$\operatorname{tg} nz = \frac{(1+t\sqrt{-1})^n - (1-t\sqrt{-1})^n}{(1+t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1} + (1-t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1}},$$

откуда получаются следующие значения для тангенсов кратных углов:

$$\operatorname{tg} z = t, \qquad \operatorname{tg} 2z = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \operatorname{tg} 3z = \frac{3t-t^3}{1-3t^2},$$

$$\operatorname{tg} 4z = \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}, \qquad \operatorname{tg} 5z = \frac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4},$$

и вообще

$$\operatorname{tg} nz = \frac{nt - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}t^5 - \text{и т. д.}}{1 - \frac{n(n-1)}{1\cdot2}t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}t^4 - \text{и т. д.}}.$$

Так как $\operatorname{tg} nz = \operatorname{tg}(\pi + nz) = \operatorname{tg}(2\pi + nz) = \operatorname{tg}(3\pi + nz)$ и т. д., то значениями t, или корнями уравнения, будут

$$\operatorname{tg} z,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n} + z\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right),\ \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \text{ и т. д.};$$

число их есть n.

250. Если же начать уравнение с единицы, то будем иметь

$$0 = 1 - \frac{nt}{\operatorname{tg} nz} - \frac{n(n-1)t^2}{1\cdot2} + \frac{n(n-1)(n-2)t^3}{1\cdot2\cdot3\operatorname{tg} nz} + \text{ и т. д.}$$

При сравнении коэффициентов с корнями получится

$$n\operatorname{ctg} nz = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n} + z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) +$$
$$+ \operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) + \ldots + \operatorname{ctg}\left(\frac{n-1}{n}\pi + z\right);$$

отсюда сумма квадратов всех этих котангенсов будет равна

$$\frac{n^2}{(\sin nz)^2} - n;$$

подобным же образом можно определить дальнейшие степени. Если вместо n подставлять определенные числа, то будет

$$\operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg} z,$$

$$2\operatorname{ctg} 2z = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + z\right),$$

$$3\operatorname{ctg} 3z = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{3} + z\right),$$

$$4\operatorname{ctg} 4z = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{4} + z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} + z\right),$$

$$5\operatorname{ctg} 5z = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{5} + z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi}{5} + z\right).$$

251. Так как $\operatorname{ctg} v = -\operatorname{ctg}(\pi - v)$, то

$$\operatorname{ctg} z = \operatorname{ctg} z,$$

$$2\operatorname{ctg} 2z = \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

$$3\operatorname{ctg} 3z = \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} + z\right),$$

$$4\operatorname{ctg} 4z = \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + z\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{4} - z\right),$$

$$5\operatorname{ctg} 5z = \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right),$$

и вообще

$$n\operatorname{ctg} nz = \operatorname{ctg} z - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n} + z\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) - \text{ и т. д.},$$

где берется столько членов, сколько число n содержит единиц.

252. Начнем полученное уравнение с наивысшей степени; здесь прежде всего надо различать случаи четного или нечетного числа n. Пусть n будет числом нечетным, т. е. $n = 2m + 1$; тогда [1])

$$t - \operatorname{tg} z = 0,$$

$$t^3 - 3t^2 \operatorname{tg} 3z - 3t + \operatorname{tg} 3z = 0,$$

$$t^5 - 5t^4 \operatorname{tg} 5z - 10t^3 + 10\, t^2 \operatorname{tg} 5z - \operatorname{tg} 5z = 0,$$

и вообще

$$t^n - nt^{n-1} \operatorname{tg} nz - \ldots \mp \operatorname{tg} nz = 0,$$

причем верхний знак, минус, имеет место, если m число четное, а нижний,

[1]) См. § 249. [*С. Л.*]

плюс, если m нечетное. По коэффициенту второго члена находим

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} z,$$

$$3 \operatorname{tg} 3z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3} + z\right),$$

$$5 \operatorname{tg} 5z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{5} + z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{5} + z\right)$$

и т. д.

253. Так как $\operatorname{tg} v = -\operatorname{tg}(\pi - v)$, то углы, бо́льшие прямого, приводятся к углам, меньшим прямого, и будет

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} z,$$

$$3 \operatorname{tg} 3z = \operatorname{tg} z - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + z\right),$$

$$5 \operatorname{tg} 5z = \operatorname{tg} z - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} - z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right),$$

$$7 \operatorname{tg} 7z = \operatorname{tg} z - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{7} - z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{7} + z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{7} - z\right) + {}$$
$$+ \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{7} + z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{7} - z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{7} + z\right),$$

и вообще если $n = 2m + 1$ то

$$n \operatorname{tg} nz = \operatorname{tg} z - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n} + z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) -$$
$$- \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) - \ldots - \operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n} + z\right).$$

254. Далее, произведение всех этих тангенсов будет равно $\operatorname{tg} nz$- потому что, вследствие попеременной четности и нечетности числа отрицательных знаков, вышеуказанная двойственность знаков уничтожается. Итак,

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} z,$$

$$\operatorname{tg} 3z = \operatorname{tg} z \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + z\right),$$

$$\operatorname{tg} 5z = \operatorname{tg} z \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} - z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} + z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} - z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{5} + z\right),$$

и вообще при $n = 2m + 1$ будет

$$\operatorname{tg} nz = \operatorname{tg} z \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n} - z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n} + z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) \times$$
$$\times \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) \ldots \operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n} + z\right).$$

255. Пусть теперь n будет числом четным; если начать с наибольшей степени, то получится

$$t^2 + 2t \operatorname{ctg} 2z - 1 = 0,$$

$$t^4 + 4t^3 \operatorname{ctg} 4z - 6t^2 - 4t \operatorname{ctg} 4z + 1 = 0,$$

и вообще, когда $n = 2m$,

$$t^n + nt^{n-1} \operatorname{ctg} nz - \ldots \mp 1 = 0,$$

где имеют место верхний знак, минус, при m нечетном и нижний, плюс, при m четном. При сравнении корней с коэффициентом второго члена получится

$$-2\operatorname{ctg} 2z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+z\right),$$

$$-4\operatorname{ctg} 4z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{4}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}+z\right),$$

$$-6\operatorname{ctg} 6z = \operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}+z\right)$$

и т. д.

256. Так как $\operatorname{tg} v = -\operatorname{tg}(\pi - v)$, то образуются следующие равенства:

$$2\operatorname{ctg} 2z = -\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right),$$

$$4\operatorname{ctg} 4z = -\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{4}-z\right),$$

$$6\operatorname{ctg} 6z = -\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{6}-z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{6}-z\right),$$

и вообще, если $n = 2m$, то

$$n\operatorname{ctg} nz = -\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}-z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}-z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{n}-z\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{n}+z\right) + \ldots + \operatorname{tg}\left(\frac{m\pi}{n}-z\right).$$

257. При помощи этих выражений опять уничтожается двойственность произведения всех корней; поэтому будет

$$1 = \operatorname{tg} z \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right),$$

$$1 = \operatorname{tg} z \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{4}-z\right),$$

$$1 = \operatorname{tg} z \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{6}-z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{6}+z\right) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{6}-z\right)$$

и т. д.

Построение этих равенств сейчас же с отчетливостью бросается в глаза, так как мы все время находим по два угла, являющихся друг для друга дополнениями к прямому. Произведение тангенсов двух таких углов равно единице, и, следовательно, произведение всех должно равняться единице.

258. Так как синусы и косинусы углов, составляющих арифметическую прогрессию, образуют рекуррентный ряд, то сумма скольких угодно таких синусов и косинусов может быть выражена на основании предыдущей главы. Пусть углы, возрастающие в арифметической

прогрессии, будут

$$a, \quad a+b, \quad a+2b, \quad a+3b, \quad a+4b, \quad a+5b \quad \text{и т. д.},$$

и требуется сперва найти сумму синусов этих образующих бесконечную прогрессию углов; положим

$$s = \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \quad \text{и т. д.};$$

так как этот ряд рекуррентный, со шкалой отношения $2\cos b$; -1, то он получается из развертывания дроби со знаменателем

$$1 - 2z\cos b + z^2,$$

если положить $z = 1$. Сама же дробь будет равна

$$\frac{\sin a + z\,[\sin(a+b) - 2\sin a\cos b]}{1 - 2z\cos b + z^2};$$

поэтому при $z = 1$ будет

$$s = \frac{\sin a + \sin(a+b) - 2\sin a\cos b}{2 - 2\cos b} = \frac{\sin a - \sin(a-b)}{2\,(1-\cos b)},$$

потому что

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b).$$

Но так как

$$\sin f - \sin g = 2\cos\frac{f+g}{2}\sin\frac{f-g}{2},$$

то

$$\sin a - \sin(a-b) = 2\cos\left(a - \frac{1}{2}b\right)\sin\frac{1}{2}b.$$

Но

$$1 - \cos b = 2\left(\sin\frac{1}{2}b\right)^2;$$

отсюда

$$s = \frac{\cos\left(a - \frac{1}{2}b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b}.$$

259. Итак, этим путем может быть указана сумма скольких угодно синусов, коих дуги возрастают в арифметической прогрессии. Пусть, например, требуется найти сумму прогрессии

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \sin(a+3b) + \ldots + \sin(a+nb).$$

Так как сумма этой прогрессии при продолжении до бесконечности есть $\dfrac{\cos\left(a - \frac{1}{2}b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b}$, то рассмотрим члены, следующие за последним до бесконечности:

$$\sin[a+(n+1)b] + \sin[a+(n+2)b] + \sin[a+(n+3)b] + \quad \text{и т. д.};$$

сумма их равна

$$\frac{\cos\left[a + \left(n + \frac{1}{2}\right)b\right]}{2\sin\frac{1}{2}b};$$

если отнять ее от предыдущей, то останется искомая сумма. Так, если

$$s = \sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) + \ldots + \sin(a+nb),$$

то

$$s = \frac{\cos\left(a-\frac{1}{2}b\right) - \cos\left[a+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right]}{2\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\sin\left(a+\frac{1}{2}nb\right)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

260. Равным образом, если рассматривать сумму косинусов и положить

$$s = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \text{ и т. д. до бесконечности},$$

то

$$s = \frac{\cos a + z[\cos(a+b) - 2\cos a\cos b]}{1 - 2z\cos b + z^2}$$

при $z = 1$. Поэтому, так как

$$2\cos a\cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b),$$

то

$$s = \frac{\cos a - \cos(a-b)}{2(1-\cos b)},$$

но

$$\cos f - \cos g = 2\sin\frac{f+g}{2}\sin\frac{g-f}{2};$$

отсюда

$$\cos a - \cos(a-b) = -2\sin\left(a-\frac{1}{2}b\right)\sin\frac{1}{2}b,$$

и так как

$$1 - \cos b = 2\left(\sin\frac{1}{2}b\right)^2,$$

то

$$s = -\frac{\sin\left(a-\frac{1}{2}b\right)}{2\sin\frac{1}{2}b}.$$

Подобным образом сумма ряда

$$\cos[a+(n+1)b] + \cos[a+(n+2)b] + \cos[a+(n+3)b] + \text{ и т. д.}$$

будет равна

$$\frac{\sin\left[a+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right]}{2\sin\frac{1}{2}b},$$

если отнять вторую от первой, то останется сумма ряда

$$s = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \cos(a+3b) + \ldots + \cos(a+nb),$$

и она будет равна

$$\frac{-\sin\left(a-\frac{1}{2}b\right) + \sin\left[a+\left(n+\frac{1}{2}\right)b\right]}{2\sin\frac{1}{2}b} = \frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}nb\right)\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{1}{2}b}.$$

261. На основе указанных принципов могут быть разрешены и многие другие вопросы относительно синусов и тангенсов; таково, например, нахождение сумм квадратов или более высоких степеней синусов и тангенсов; но так как все это выводится аналогичным образом из остальных коэффициентов написанных выше уравнений, то я на этом останавливаться дольше не буду. Относительно же этих последних суммирований следует заметить, что любую степень синусов и косинусов можно выразить при помощи отдельных синусов и косинусов; для большей ясности мы это вкратце изложим.

262. Для этой цели будет полезным вывести из предыдущего такие леммы:

$$2\sin a\sin z=\cos(a-z)-\cos(a+z),\qquad 2\cos a\sin z=\sin(a+z)-\sin(a-z),$$
$$2\sin a\cos z=\sin(a+z)+\sin(a-z),\qquad 2\cos a\cos z=\cos(a-z)+\cos(a+z).$$

Отсюда находим вначале степени синусов:

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin z,\\
2(\sin z)^2 &= 1-\cos 2z,\\
4(\sin z)^3 &= 3\sin z-\sin 3z,\\
8(\sin z)^4 &= 3-4\cos 2z+\cos 4z,\\
16(\sin z)^5 &= 10\sin z-5\sin 3z+\sin 5z,\\
32(\sin z)^6 &= 10-15\cos 2z+6\cos 4z-\cos 6z,\\
64(\sin z)^7 &= 35\sin z-21\sin 3z+7\sin 5z-\sin 7z,\\
128(\sin z)^8 &= 35-56\cos 2z+28\cos 4z-8\cos 6z+\cos 8z,\\
256(\sin z)^9 &= 126\sin z-84\sin 3z+36\sin 5z-9\sin 7z+\sin 9z
\end{aligned}$$

и т. д.

Закон, которому следуют здесь коэффициенты, совпадает с законом следования коэффициентов степени бинома, за тем лишь исключением, что свободный член в выражениях для четных степеней синусов равен половине соответствующего коэффициента в разложении бинома.

263. Подобным образом определятся степени косинусов:

$$\begin{aligned}
\cos z &= \cos z,\\
2(\cos z)^2 &= 1+\cos 2z,\\
4(\cos z)^3 &= 3\cos z+\cos 3z,\\
8(\cos z)^4 &= 3+4\cos 2z+\cos 4z,\\
16(\cos z)^5 &= 10\cos z+5\cos 3z+\cos 5z,\\
32(\cos z)^6 &= 10+15\cos 2z+6\cos 4z+\cos 6z,\\
64(\cos z)^7 &= 35\cos z+21\cos 3z+7\cos 5z+\cos 7z
\end{aligned}$$

и т. д.,

причем относительно закона следования коэффициентов справедливо сказанное выше по поводу синусов.

ГЛАВА XV

О РЯДАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПЕРЕМНОЖЕНИИ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

264. Пусть дано произведение, составленное из конечного или бесконечного числа множителей, вида

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)(1+\varepsilon z)(1+\zeta z) \text{ и т. д.},$$

которое при развертывании путем фактического перемножения дает

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+Fz^6+ \text{ и т. д.}$$

Тогда ясно, что коэффициенты A, B, C, D, E и т. д. образуются из чисел α, β, γ, δ, ε, ζ и т. д. таким образом:

$A=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+$ и т. д. $=$ сумме всех по одному,
$B=$ сумме произведений по два различных,
$C=$ » » » три различных,
$D=$ » » » четыре различных,
$E=$ » » » пяти различных
и т. д.,

пока не дойдем до произведения всех.

265. Если положить $z=1$, то произведение

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon) \text{ и т. д.}$$

будет равно единице с рядом всех чисел, которые образуются из α, β, γ, δ, ε и т. д., если брать их по одному, или перемножать по два, или по нескольку между собой. Если при этом одно и то же число может быть получено двумя или несколькими способами, то в этом ряде чисел встретится одно и то же число дважды или несколько раз.

266. Если положить $z=-1$, то произведение

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon) \text{ и т. д.}$$

будет равно единице с рядом всех чисел, которые образуются из α, β, γ, δ, ε и т. д., если брать их по одному или перемножать по два, или по нескольку между собой, как и раньше, но с той лишь разницей, что числа, получаемые из одного или из трех, или из пяти и вообще из нечетного числа множителей, будут отрицательны; те же, которые получаются из двух, четырех, шести и вообще из четного числа, будут положительны.

267. Если написать вместо α, β, γ, δ и т. д. все простые числа

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13 \text{ и т. д.},$$

то произведение

$$(1+2)\,(1+3)\,(1+5)\,(1+7)\,(1+11)\,(1+13) \text{ и т. д.} = P$$

будет равно единице с рядом, составленным из простых чисел и тех, которые получаются от перемножения различных простых. Таким образом,

$$P = 1+2+3+5+6+7+10+11+13+14+15+17+ \text{ и т. д.};$$

в этом ряде встречаются все натуральные числа, за исключением степеней, а также тех, которые делятся на какую-либо степень. Именно, недостает чисел 4, 8, 9, 12, 16, 18 и т. д., так как они либо являются степенями, как 4, 8, 9, 16 и т. д., либо делятся на степени, как 12, 18 и т. д.

268. Так же будет обстоять дело, если вместо α, β, γ, δ и т. д. подставить какие-либо степени простых чисел. Именно, если положим

$$P = \left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right) \text{ и т. д.},$$

то при перемножении получится

$$P = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+ \text{ и т. д.};$$

в этих дробях встречаются все числа, за исключением тех, которые либо сами являются степенями, либо делятся на какую-либо степень. Но так как все целые числа являются либо простыми, либо составляются из простых путем умножения, то исключаются лишь те числа, в образование которых входит одно и то же простое число дважды или большее число раз.

269. Если числа α, β, γ, δ и т. д. взять отрицательными, как мы делали раньше (§ 266), и положить

$$P = \left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right) \text{ и т. д.},$$

то будет

$$P = 1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\frac{1}{13^n}+\frac{1}{14^n}+\frac{1}{15^n}- \text{ и т. д.};$$

здесь опять, как раньше, встречаются все числа, за исключением степеней и тех, которые делятся на степени. Сами простые числа, а также те, которые состоят из трех, пяти и вообще нечетного числа, имеют знак минус; те же, которые образуются из двух, четырех, шести или вообще четного числа, имеют знак плюс. Так, в этом ряде встречается член $\frac{1}{30^n}$; так как $30 = 2\cdot3\cdot5$ и не содержит степени, то член этот $\frac{1}{30^n}$ будет иметь знак минус, потому что 30 представляет произведение трех простых чисел.

270. Рассмотрим теперь выражение

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)(1-\varepsilon z) \text{ и т. д.}},$$

которое при развертывании путем фактического деления дает ряд

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+Fz^6+ \text{ и т. д.};$$

при этом коэффициенты A, B, C, D, E и т. д. составляются, очевидно, из чисел α, β, γ, δ, ε и т. д. так, что

$A =$ сумме отдельных чисел,

$B =$ сумме произведений по два,

$C =$ сумме произведений по три,

$D =$ сумме произведений по четыре

и т. д.,

не исключая одинаковых сомножителей [53].

271. Если положить $z=1$, то выражение

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon) \text{ и т. д.}}$$

будет равно единице с рядом всех чисел, какие получаются из α, β, γ, δ, ε и т. д., если или брать их по одному, или их произведения по два и более, не исключая одинаковых. Стало быть, этот ряд чисел отличается от ранее [§ 265] полученного тем, что там надлежало брать только различные сомножители, здесь же один и тот же множитель может встречаться дважды или большее число раз. Таким образом, здесь встречаются все числа, какие только могут произойти от перемножения α, β, γ, δ и т. д.

272. Вследствие этого ряд состоит всегда из бесконечного числа членов, независимо от того, будет ли число сомножителей бесконечным, или конечным. Так,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+ \text{ и т. д.},$$

где налицо все числа, получающиеся от перемножения одной лишь двойки самое на себя, т. е. все степени двух. Далее,

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+ \text{ и т. д.},$$

где не встречается других чисел, кроме тех, которые получаются от перемножения 2 и 3, т. е. тех, которые не имеют других делителей, кроме 2 и 3.

273. Если вместо α, β, γ, δ и т. д. написать обратные величины всех простых чисел и положить

$$P=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right) \text{ и т. д.}},$$

то получим

$$P=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\text{ и т. д.},$$

где встречаются все числа, как простые, так и получаемые от перемножения простых. Но так как все целые числа являются или простыми, или получаются при перемножении простых, то поэтому здесь должны присутствовать в знаменателях решительно все целые числа.

274. То же самое получается, если взять какую-либо степень простых чисел; так, если положить

$$P=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\text{ и т. д.}},$$

то получим

$$P=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\text{ и т. д.},$$

где встречаются все без исключения натуральные числа. Если же в сомножителях поставить везде знак плюс, так что

$$P=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\text{ и т. д.}},$$

то будем иметь

$$P=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\text{ и т. д.},$$

где простые числа имеют знак минус; те, которые представляют произведения из двух простых — одинаковых или различных, — имеют знак плюс, и вообще те, у которых число простых сомножителей четное, имеют знак плюс, те же, которые состоят из нечетного числа простых сомножителей, имеют знак минус. Так, член $\frac{1}{240^n}$ будет иметь знак плюс, потому что $240=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5$. Основание этого закона видно из § 270, если положить $z=-1$.

275. Если сопоставить это с изложенным выше, то получатся два ряда, произведение которых равно единице. Пусть

$$P=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\text{ и т. д.}}$$

и

$$Q=\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\text{ и т. д.};$$

тогда

$$P=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\text{ и т. д.},$$

$$Q=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\text{ и т. д.}$$

(§ 269), причем ясно, что $PQ=1$.

276. Если же положить

$$P=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\text{ и т. д.}}$$

и

$$Q=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\text{ и т. д.,}$$

то будем иметь

$$P=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\text{ и т. д.,}$$

$$Q=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\text{ и т. д.,}$$

и также будет $PQ=1$. Если сумма одного ряда известна, то вместе с тем получится сумма другого.

277. Обратно, если известны суммы этих рядов, то могут быть найдены значения бесконечных произведений[1]). Пусть

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\text{ и т. д.,}$$

$$N=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\text{ и т. д.;}$$

тогда будем иметь

$$M=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\text{ и т. д.}},$$

$$N=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\text{ и т. д.}};$$

отсюда путем деления получается

$$\frac{M}{N}=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\text{ и т. д.;}$$

наконец,

$$\frac{M^2}{N}=\frac{2^n+1}{2^n-1}\cdot\frac{3^n+1}{3^n-1}\cdot\frac{5^n+1}{5^n-1}\cdot\frac{7^n+1}{7^n-1}\cdot\frac{11^n+1}{11^n-1}\text{ и т. д.}$$

Если известны M и N, то, кроме значений этих произведений, получатся суммы таких рядов:

$$\frac{1}{M}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\text{ и т. д.,}$$

$$\frac{1}{N}=1-\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}-\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{10^{2n}}-\frac{1}{11^{2n}}-\text{ и т. д.,}$$

$$\frac{M}{N}=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\text{ и т. д.,}$$

$$\frac{N}{M}=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\text{ и т. д.,}$$

а комбинируя их, можно вывести много других.

[1]) factorum infinitorum; буквально: бесконечного числа множителей.

ПРИМЕР 1

Пусть $n=1$; так как выше мы показали, что

$$l\frac{1}{1-x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\text{ и т. д.},$$

то при $x=1$ будет

$$l\frac{1}{1-1}=l\infty=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\text{ и т. д.}$$

Но логарифм бесконечно большого числа ∞ сам бесконечно велик; поэтому

$$M=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{ и т. д.}=\infty;$$

отсюда, так как $\frac{1}{M}=\frac{1}{\infty}=0$, получится

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}-\text{ и т. д.}$$

Тогда в произведениях будем иметь

$$M=\infty=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\text{ и т. д.}},$$

откуда

$$\infty=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\text{ и т. д.}$$

и

$$0=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\text{ и т. д.}$$

Далее, как раньше показано с помощью суммирования рядов [§ 167],

$$N=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\text{ и т. д.}=\frac{\pi^2}{6};$$

отсюда получаются суммы таких рядов:

$$\frac{6}{\pi^2}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}-\text{ и т. д.},$$

$$\infty=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\text{ и т. д.},$$

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}-\text{ и т. д.}$$

Наконец, беря произведения, получаем

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdot\text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{121}{120}\cdot\frac{169}{168}\cdot\text{ и т. д.}$$

Так как $\frac{M}{N}=\infty$ или $\frac{N}{M}=0$, то имеем

$$\infty=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\cdot\text{ и т. д.}$$

или

$$0=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{20}\cdot \text{ и т. д.},$$

а также

$$\infty=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{14}{12}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{20}{18}\cdot \text{ и т. д.}$$

или

$$0=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot \text{ и т. д.};$$

числители этих дробей (за исключением первой) на единицу меньше знаменателей; суммы же числителей и знаменателей каждой дроби постоянно дают простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и т. д.

ПРИМЕР 2

Пусть $n=2$; тогда согласно доказанному раньше [§ 167]

$$M=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+ \text{ и т. д.}=\frac{\pi^2}{6},$$

$$N=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+ \text{и т. д.}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Отсюда находятся прежде всего суммы следующих рядов:

$$\frac{6}{\pi^2}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}- \text{ и т. д.},$$

$$\frac{90}{\pi^4}=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}-\frac{1}{11^4}- \text{ и т. д.},$$

$$\frac{15}{\pi^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+ \text{ и т. д.},$$

$$\frac{\pi^2}{15}=1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}-\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{10^2}- \text{ и т. д.}$$

Затем получаются значения следующих произведений:

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\frac{\pi^4}{90}=\frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\frac{15}{\pi^2}=\frac{2^2+1}{2^2}\cdot\frac{3^2+1}{3^2}\cdot\frac{5^2+1}{5^2}\cdot\frac{7^2+1}{7^2}\cdot\frac{11^2+1}{11^2}\cdot \text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{\pi^2}{15}=\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{25}{26}\cdot\frac{49}{50}\cdot\frac{121}{122}\cdot\frac{169}{170}\cdot \text{ и т. д.}$$

и

$$\frac{5}{2}=\frac{2^2+1}{2^2-1}\cdot\frac{3^2+1}{3^2-1}\cdot\frac{5^2+1}{5^2-1}\cdot\frac{7^2+1}{7^2-1}\cdot\frac{11^2+1}{11^2-1}\cdot \text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{5}{2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdot \text{ и т. д.},$$

или

$$\frac{3}{2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{61}{60}\cdot\frac{85}{84}\cdot \text{ и т. д.}$$

В этих дробях числители на единицу превышают знаменатели; сложенные же вместе, они дают квадраты простых чисел 3^2, 5^2, 7^2, 11^2 и т. д.

ПРИМЕР 3

Так как из изложенного раньше [§ 167] можно найти значения M только когда n — число четное, то полагаем далее $n=4$; получаем

$$M = 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+ \text{ и т. д.} = \frac{\pi^4}{90},$$

$$N = 1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+ \text{ и т. д.} = \frac{\pi^8}{9450}.$$

Отсюда прежде всего определяются суммы следующих рядов:

$$\frac{90}{\pi^4} = 1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}-\frac{1}{11^4}- \text{ и т. д.},$$

$$\frac{9450}{\pi^8} = 1-\frac{1}{2^8}-\frac{1}{3^8}-\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}-\frac{1}{7^8}+\frac{1}{10^8}-\frac{1}{11^8}- \text{ и т д.},$$

$$\frac{105}{\pi^4} = 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+ \text{ и т. д.},$$

$$\frac{\pi^4}{105} = 1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}-\frac{1}{7^4}-\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+ \text{ и т. д.}$$

Затем получаются значения следующих произведений:

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}\cdot\frac{5^4}{5^4-1}\cdot\frac{7^4}{7^4-1}\cdot\frac{11^4}{11^4-1}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^8}{2^8-1}\cdot\frac{3^8}{3^8-1}\cdot\frac{5^8}{5^8-1}\cdot\frac{7^8}{7^8-1}\cdot\frac{11^8}{11^8-1}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\frac{105}{\pi^4} = \frac{2^4+1}{2^4}\cdot\frac{3^4+1}{3^4}\cdot\frac{5^4+1}{5^4}\cdot\frac{7^4+1}{7^4}\cdot\frac{11^4+1}{11^4}\cdot \text{ и т. д.}$$

и

$$\frac{7}{6} = \frac{2^4+1}{2^4-1}\cdot\frac{3^4+1}{3^4-1}\cdot\frac{5^4+1}{5^4-1}\cdot\frac{7^4+1}{7^4-1}\cdot\frac{11^4+1}{11^4-1}\cdot \text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{35}{34} = \frac{41}{40}\cdot\frac{313}{312}\cdot\frac{1201}{1200}\cdot\frac{7321}{7320}\ \cdot \text{ и т. д.};$$

в этих дробях числители на единицу превышают знаменатели; сложенные же вместе, они дают четвертые степени простых нечетных чисел 3, 5, 7, 11 и т. д.

278. Поскольку сумму ряда

$$M = 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+ \text{ и т. д.}$$

мы представили в виде произведения, то можно будет удобно перейти к логарифмам. Так как

$$M = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right) \text{ и т. д.}},$$

то будем иметь

$$lM = -l\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-l\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-l\left(1-\frac{1}{5^n}\right)-l\left(1-\frac{1}{7^n}\right)-\text{и т. д.}$$

Отсюда, беря гиперболические логарифмы, получим

$$\begin{aligned} lM = &+1\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Если, кроме того, положим

$$N = 1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\text{и т. д.},$$

так что

$$N = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1-\frac{1}{11^{2n}}\right)\text{ и т. д.}},$$

то, беря гиперболические логарифмы, найдем

$$\begin{aligned} lN = &+1\left(\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{4n}}+\frac{1}{3^{4n}}+\frac{1}{5^{4n}}+\frac{1}{7^{4n}}+\frac{1}{11^{4n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{6n}}+\frac{1}{3^{6n}}+\frac{1}{5^{6n}}+\frac{1}{7^{6n}}+\frac{1}{11^{6n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{8n}}+\frac{1}{3^{8n}}+\frac{1}{5^{8n}}+\frac{1}{7^{8n}}+\frac{1}{11^{8n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Соединяя эти результаты, получим

$$\begin{aligned} lM-\frac{1}{2}lN = &+1\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\frac{1}{5^{3n}}+\frac{1}{7^{3n}}+\frac{1}{11^{3n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5n}}+\frac{1}{3^{5n}}+\frac{1}{5^{5n}}+\frac{1}{7^{5n}}+\frac{1}{11^{5n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7n}}+\frac{1}{3^{7n}}+\frac{1}{5^{7n}}+\frac{1}{7^{7n}}+\frac{1}{11^{7n}}+\text{и т. д.}\right)\\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

279. Если $n=1$, то

$$M = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{и т. д.} = l\,\infty$$

и

$$N = \frac{\pi^2}{6};$$

отсюда

$$\begin{aligned} ll_\infty-\frac{1}{2}\,l\,\frac{\pi^2}{6}= &+1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{11^3}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{11^5}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{11^7}+\text{и т. д.}\right)\\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Все эти ряды, за исключением первого, не только имеют конечные суммы, но и взятые вместе дают конечную сумму, и притом довольно небольшую; отсюда сумма первого ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\text{и т. д.}$$

необходимо должна быть бесконечно большой, т. е. должна быть меньше гиперболического логарифма ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{и т. д.}$$

на достаточно малую величину.

280. Пусть $n=2$; тогда

$$M=\frac{\pi^2}{6}\quad\text{и}\quad N=\frac{\pi^4}{90};$$

отсюда

$$\begin{aligned} 2l\pi-l6= &1\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{11^4}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{11^6}+\text{и т. д.}\right)\\ &\text{и т. д.,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4l\pi-l90= &+1\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{11^4}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{11^8}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{7^{12}}+\frac{1}{11^{12}}+\text{и т. д.}\right)\\ &\text{и т. д.,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,l\,\frac{5}{2}\,[1]= &1\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{11^2}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{11^6}+\text{и т. д.}\right)\\ &+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{7^{10}}+\frac{1}{11^{10}}+\text{и т. д.}\right)\\ &\text{и т. д.}\end{aligned}$$

[1] $\frac{1}{2}\,l\,\frac{5}{2}=2\,(2l\pi-l6)-(4l\pi-l90)$.

281. Хотя закон последовательности простых чисел неизвестен, однако нетрудно приближенно указать суммы таких рядов с более высокими степенями. Пусть даны ряды

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\text{и т. д.}$$

и

$$S=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\text{и т. д.};$$

тогда

$$S=M-1-\frac{1}{4^n}-\frac{1}{6^n}-\frac{1}{8^n}-\frac{1}{9^n}-\frac{1}{10^n}-\text{и т. д.},$$

а так как

$$\frac{M}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{12^n}+\text{и т. д.},$$

то

$$S=M-\frac{M}{2^n}-1+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{9^n}-\frac{1}{15^n}-\frac{1}{21^n}-\text{и т. д.}$$

или

$$S=(M-1)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{9^n}-\frac{1}{15^n}-\frac{1}{21^n}-\frac{1}{25^n}-\frac{1}{27^n}-\text{и т. д.},$$

и так как

$$M\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{21^n}+\text{и т. д.},$$

то будем иметь

$$S=(M-1)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{25^n}-\frac{1}{35^n}-\frac{1}{49^n}-\text{и т. д.}$$

Отсюда по данной сумме M удобно найдется значение S, если, впрочем, n будет числом умеренно большим.

282. Когда найдены суммы высших степеней, то по выведенным формулам можно получить суммы меньших степеней. По этому методу получатся следующие суммы ряда:

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\text{и т. д.}:$$

если	то сумма ряда будет
$n=2$,	0,45224 74200 41065,
$n=4$,	0,07699 31397 64247,
$n=6$,	0,01707 00868 50637,
$n=8$,	0,00406 14053 66518,
$n=10$,	0,00099 36035 74437,
$n=12$,	0,00024 60264 70035,
$n=14$,	0,00006 12443 96725,
$n=16$,	0,00001 52820 26219,
$n=18$,	0,00000 38172 78703,
$n=20$,	0,00000 09539 61124,
$n=22$,	0,00000 02384 50446,

$$
\begin{aligned}
n&=24, & &0{,}00000\,00596\,08185,\\
n&=26, & &0{,}00000\,00149\,01555,\\
n&=28, & &0{,}00000\,00037\,25334,\\
n&=30, & &0{,}00000\,00009\,31327,\\
n&=32, & &0{,}00000\,00002\,32831,\\
n&=34, & &0{,}00000\,00000\,58208,\\
n&=36, & &0{,}00000\,00000\,14552\text{[1]}).
\end{aligned}
$$

Остальные суммы четных степеней убывают в отношении 4 к 1.

283. Можно также и непосредственно произвести обращение ряда

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{и т. д.}$$

в бесконечное произведение следующим образом. Пусть

$$A=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\text{и т. д.};$$

если вычесть

$$\frac{1}{2^n}A=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\text{и т. д.},$$

то получим

$$\left(1-\frac{1}{2^n}\right)A=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\text{и т. д.}=B;$$

так устранены все члены, делящиеся на 2. Если вычесть

$$\frac{1}{3^n}B=\frac{1}{3^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{21^n}+\text{и т. д.},$$

то будем иметь

$$\left(1-\frac{1}{3^n}\right)B=1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\text{и т. д.}=C.$$

Так, сверх того, устранены все члены, делящиеся на 3. Если вычесть

$$\frac{1}{5^n}C=\frac{1}{5^n}+\frac{1}{25^n}+\frac{1}{35^n}+\frac{1}{55^n}+\text{и т. д.},$$

то получится

$$\left(1-\frac{1}{5^n}\right)C=1+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}+\text{и т. д.}$$

Здесь устранены также и все члены, делящиеся на 5. Таким же образом устраняются члены, делящиеся на 7, 11 и на остальные простые числа; при этом ясно, что по удалении всех членов, которые делятся на простые числа, останется одна только единица. Поэтому после подстановки значений B, C, D, E и т. д., наконец, получится

$$A\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\ \text{и т. д.}=1.$$

Отсюда сумма данного ряда будет

$$A=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1-\frac{1}{11^n}\right)\ \text{и т. д.}}$$

[1]) Значения этих сумм для $n=2, 4, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 34, 36$ исправлены в соответствии с Opera omnia.

или

$$A=\frac{2^n}{2^n-1}\cdot\frac{3^n}{3^n-1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n-1}\cdot \text{и т. д.}$$

284. Этот же метод удобно может быть применен к обращению в бесконечные произведения и других рядов, суммы которых мы нашли раньше. Так (§ 175), мы нашли суммы рядов

$$1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\text{и т. д.}$$

при n нечетном; они равны $N\pi^n$, причем значения N нами даны там же. Следует, однако, заметить, что так как здесь встречаются только нечетные числа, то те из них, которые имеют форму $4m+1$, будут со знаком плюс, остальные же, вида $4m-1$, со знаком минус. Пусть

$$A=1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{15^n}+\text{и т. д.}$$

Прибавим

$$\frac{1}{3^n}A=\frac{1}{3^n}-\frac{1}{9^n}+\frac{1}{15^n}-\frac{1}{21^n}+\frac{1}{27^n}-\text{и т. д.};$$

получится

$$\left(1+\frac{1}{3^n}\right)A=1+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\text{и т. д.}=B.$$

Вычтем

$$\frac{1}{5^n}B=\frac{1}{5^n}+\frac{1}{25^n}-\frac{1}{35^n}-\frac{1}{55^n}+\text{и т. д.};$$

это даст

$$\left(1-\frac{1}{5^n}\right)B=1-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\text{и т. д.}=C,$$

где уже недостает чисел, делящихся на 3 и на 5. Прибавим

$$\frac{1}{7^n}C=\frac{1}{7^n}-\frac{1}{49^n}-\frac{1}{77^n}+\text{и т. д.};$$

получим

$$\left(1+\frac{1}{7^n}\right)C=1-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\text{и т. д.}=D.$$

Так устраняются числа, делящиеся на 7. Прибавим

$$\frac{1}{11^n}D=\frac{1}{11^n}-\frac{1}{121^n}+\text{и т. д.};$$

получится

$$\left(1+\frac{1}{11^n}\right)D=1+\frac{1}{13^n}+\frac{1}{17^n}-\text{и т. д.}=E.$$

Так устраняются числа, делящиеся на 11. Исключая этим способом все остальные числа, делящиеся на прочие простые, наконец, получим

$$A=\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\left(1-\frac{1}{13^n}\right)\text{ и т. д.}=1,$$

или

$$A=\frac{3^n}{3^n+1}\cdot\frac{5^n}{5^n-1}\cdot\frac{7^n}{7^n+1}\cdot\frac{11^n}{11^n+1}\cdot\frac{13^n}{13^n-1}\cdot\frac{17^n}{17^n-1}\cdot\text{и т. д.},$$

где в числителях встречаются степени всех простых чисел; они входят и в знаменатели, увеличенные или уменьшенные на единицу, смотря по тому, будут ли простые числа вида $4m-1$ или $4m+1$.

285. Если положить $n=1$, то, так как $A=\frac{\pi}{4}$, будем иметь

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdot \text{и т. д.};$$

выше же [§ 277] мы нашли

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{5^2}{4\cdot6}\cdot\frac{7^2}{6\cdot8}\cdot\frac{11^2}{10\cdot12}\cdot\frac{13^2}{12\cdot14}\cdot\frac{17^2}{16\cdot18}\cdot\frac{19^2}{18\cdot20}\cdot \text{и т. д.}$$

По разделении второго на первое получится

$$\frac{2\pi}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdot \text{и т. д.},$$

или

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdot \text{и т. д.},$$

где в числителях стоят простые числа, знаменатели же являются числами нечетно-четными, отличающимися на единицу от числителей. Если это снова разделить на произведение для $\frac{\pi}{4}$, то получим

$$2=\frac{4}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{16}{18}\cdot\frac{20}{18}\cdot\frac{24}{22}\cdot \text{и т. д.},$$

или

$$2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot \text{и т. д.};$$

эти дроби образуются из простых нечетных чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 и т. д. путем разбиения их на две части, различающиеся на единицу, причем для числителей взяты четные, а для знаменателей — нечетные части.

286. Сравним эти выражения с формулой Валлиса[1]):

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11} \text{ и т. д.},$$

или

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot \text{и т. д.};$$

так как [§ 277]

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdot \text{и т. д.},$$

то, деля предыдущее выражение на это последнее, получим

$$\frac{32}{\pi^3}=\frac{9\cdot9}{8\cdot10}\cdot\frac{15\cdot15}{14\cdot16}\cdot\frac{21\cdot21}{20\cdot22}\cdot\frac{25\cdot25}{24\cdot26}\cdot \text{и т. д.},$$

причем в числителях встречаются все нечетные составные числа.

---

[1]) См. примечание [39] (к § 185).

287. Пусть $n=3$; тогда $A=\frac{\pi^3}{32}$ [§ 175], откуда

$$\frac{\pi^3}{32}=\frac{3^3}{3^3+1}\cdot\frac{5^3}{5^3-1}\cdot\frac{7^3}{7^3+1}\cdot\frac{11^3}{11^3+1}\cdot\frac{13^3}{13^3-1}\cdot\frac{17^3}{17^3-1}\cdot\text{и т. д.}$$

Но из ряда [§ 167]

$$\frac{\pi^6}{945}=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\text{и т. д.}$$

получаем [§ 277]

$$\frac{\pi^6}{945}=\frac{2^6}{2^6-1}\cdot\frac{3^6}{3^6-1}\cdot\frac{5^6}{5^6-1}\cdot\frac{7^6}{7^6-1}\cdot\frac{11^6}{11^6-1}\cdot\frac{13^6}{13^6-1}\cdot\text{и т. д.},$$

или [54]

$$\frac{\pi^6}{960}=\frac{3^6}{3^6-1}\cdot\frac{5^6}{5^6-1}\cdot\frac{7^6}{7^6-1}\cdot\frac{11^6}{11^6-1}\cdot\frac{13^6}{13^6-1}\cdot\text{и т. д.}$$

После деления на первое произведение это дает

$$\frac{\pi^3}{30}=\frac{3^3}{3^3-1}\cdot\frac{5^3}{5^3+1}\cdot\frac{7^3}{7^3-1}\cdot\frac{11^3}{11^3-1}\cdot\frac{13^3}{13^3+1}\cdot\frac{17^3}{17^3+1}\cdot\text{и т. д.};$$

последнее после повторного деления на первое дает

$$\frac{16}{15}=\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\frac{5^3-1}{5^3+1}\cdot\frac{7^3+1}{7^3-1}\cdot\frac{11^3+1}{11^3-1}\cdot\frac{13^3-1}{13^3+1}\cdot\frac{17^3-1}{17^3+1}\cdot\text{и т. д.}$$

или

$$\frac{16}{15}=\frac{14}{13}\cdot\frac{62}{63}\cdot\frac{172}{171}\cdot\frac{666}{665}\cdot\frac{1098}{1099}\cdot\text{и т. д.};$$

эти дроби образуются из кубов простых нечетных чисел путем разбиения их на две части, различающиеся на единицу, причем для числителей взяты четные, а для знаменателей нечетные части.

288. Из этих выражений опять можно составить новые ряды, в которых знаменатели образуются всеми натуральными числами. В самом деле, так как [§ 285]

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{3+1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\frac{7}{7+1}\cdot\frac{11}{11+1}\cdot\frac{13}{13-1}\cdot\text{и т. д.},$$

то [55]

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\text{ и т. д.}};$$

откуда путем развертывания получаем ряд

$$\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\text{и т. д.};$$

здесь закон знаков состоит в следующем: число 2 имеет знак минус, простые числа вида $4m-1$ знак минус, простые же числа вида $4m+1$ знак плюс; числа же составные имеют знаки соответственно образованию этих чисел из простых путем умножения. Так, знак дроби $\frac{1}{60}$ будет минус, потому что

$$60=\bar{2}\cdot\bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\overset{+}{5}.$$

Подобным образом, далее,

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\text{ и т. д.}},$$

откуда получается ряд

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\text{ и т. д.},$$

где число 2 имеет знак плюс, простые числа вида $4m-1$ знак минус, простые числа вида $4m+1$ знак плюс; всякое же составное число имеет тот знак, какой ему соответствует при составлении из простых чисел по правилу умножения.

289. Так как, далее [§ 285],

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\text{ и т. д.}},$$

то при развертывании получится

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}-\text{ и т. д.},$$

где встречаются только нечетные числа; знаки же чередуются так, что простые числа вида $4m-1$ имеют знак плюс, простые числа вида $4m+1$ знак минус; отсюда одновременно определяются знаки чисел составных.

Из этого можно, далее, получить два ряда, где встречаются все числа. А именно,

$$\pi=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\text{ и т. д.}},$$

откуда при развертывании получается

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\text{ и т. д.};$$

здесь число 2 имеет знак плюс, простые числа вида $4m-1$ знак плюс, простые же числа вида $4m+1$ знак минус.

Вместе с тем

$$\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\text{ и т. д.}},$$

откуда при развертывании получится

$$\frac{\pi}{3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\text{ и т. д.};$$

здесь число 2 имеет знак минус, простые числа вида $4m-1$ знак плюс и простые числа вида $4m+1$ знак минус.

290. Отсюда можно также вывести бесчисленные другие последовательности знаков, при которых могут быть найдены суммы рядов, составленных из чисел

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{8}\text{ и т. д.}$$

Действительно, так как

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\text{ и т. д.}},$$

то, умножив это выражение на $\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$, получим

$$\pi=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\text{ и т. д.}}$$

и

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\text{ и т. д.},$$

где число 2 имеет знак плюс, 3 — знак плюс, остальные простые числа вида $4m-1$ знак минус, простые числа вида $4m+1$ знак плюс и соответственно этому определяются знаки чисел составных. Подобным образом, так как

$$\pi=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\text{ и т. д.}},$$

то, умножив на $\dfrac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{3}{2}$, получим

$$\frac{3\pi}{2}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\left(1+\frac{1}{17}\right)\text{ и т. д.}},$$

откуда при развертывании получается

$$\frac{3\pi}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\text{ и т. д.},$$

здесь число 2 имеет знак плюс, простые числа вида $4m-1$ знак плюс, и простые числа вида $4m+1$, исключая 5, — знак минус.

291. Можно также получить бесчисленное количество таких рядов, у которых сумма равна нулю. Так как [§ 277]

$$0=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\text{ и т. д.},$$

то

$$0=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\text{ и т. д.}},$$

откуда, как мы видели выше, получается

$$0=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}-\text{ и т. д.};$$

здесь все простые числа имеют знак минус; знаки же чисел составных следуют правилу умножения. Но, умножив это выражение на $\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$, получим

$$0=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\text{ и т. д.}},$$

откуда при развертывании получается

$$0=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\text{ и т. д.};$$

здесь число 2 имеет знак плюс, все прочие простые числа знак минус.

Подобным образом будет также

$$0=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\text{и т. д.}},$$

откуда получается ряд

$$0=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}-\text{ и т. д.},$$

где все простые числа, кроме 3 и 5, имеют знак минус.

Вообще следует заметить, что всякий раз, когда все простые числа за исключением некоторых имеют знак минус, сумма ряда равна нулю. Напротив, как только все простые числа за исключением некоторых будут иметь знак плюс, сумма ряда будет бесконечно большой.

292. Выше (§ 176) мы дали сумму ряда

$$A=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\text{ и т. д.},$$

если n — число нечетное. Прибавляя к этому ряду

$$\frac{1}{2^n}A=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{8^n}-\frac{1}{10^n}+\frac{1}{14^n}-\text{ и т. д.},$$

получим

$$B=\left(1+\frac{1}{2^n}\right)A=1-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\frac{1}{23^n}+\frac{1}{25^n}-\text{ и т. д.}$$

Прибавим

$$\frac{1}{5^n}B=\frac{1}{5^n}-\frac{1}{25^n}+\frac{1}{35^n}-\frac{1}{55^n}+\text{ и т. д.};$$

получится

$$C=\left(1+\frac{1}{5^n}\right)B=1+\frac{1}{7^n}-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\frac{1}{23^n}-\text{ и т. д.}$$

Отнимем

$$\frac{1}{7^n}C=\frac{1}{7^n}+\frac{1}{49^n}-\frac{1}{77^n}+\text{ и т. д.};$$

получим

$$D=\left(1-\frac{1}{7^n}\right)C=1-\frac{1}{11^n}+\frac{1}{13^n}-\frac{1}{17^n}+\frac{1}{19^n}-\text{ и т. д.}$$

Отсюда, в конце концов, получаем

$$A\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{5^n}\right)\left(1-\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\left(1-\frac{1}{13^n}\right)\text{ и т. д.}=1,$$

где все простые числа, превосходящие на единицу кратные шести, имеют знак минус, меньшие же на единицу кратных шести — знак плюс.

Итак,

$$A=\frac{2^n}{2^n+1}\cdot\frac{5^n}{5^n+1}\cdot\frac{7^n}{7^n-1}\cdot\frac{11^n}{11^n+1}\cdot\frac{13^n}{13^n-1}\cdot\text{ и т. д.}$$

293. Рассмотрим случай $n=1$, когда $A=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; получим

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot \text{и т. д.},$$

где в числителях встречаются все простые числа, следующие за числом 3, соответствующие же знаменатели отличаются от числителей на 1 и все делятся на 6. Так как [§ 277]

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdot\frac{11\cdot 11}{10\cdot 12}\cdot\frac{13\cdot 13}{12\cdot 14}\cdot \text{ и т. д.},$$

то, разделив это выражение на предыдущее, будем иметь

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2}=\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot \text{ и т. д.},$$

где знаменатели на 6 не делятся; или будет

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{24}\cdot \text{ и т. д.},$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{22}\cdot \text{и т. д.}$$

Последнее после деления на предыдущее дает

$$\frac{4}{3}=\frac{6}{4}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{12}{10}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{18}{16}\cdot\frac{18}{20}\cdot\frac{24}{22}\cdot \text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{4}{3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{11}\cdot \text{ и т. д.},$$

где отдельные дроби образуются из простых чисел 5, 7, 11 и т. д., причем эти числа разбиваются на две части, различающиеся на единицу, и части, делящиеся на 3, берутся все время в качестве числителей.

294. Мы видели выше [§ 285], что

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot \text{ и т. д.}$$

или

$$\frac{\pi}{3}=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot \text{ и т. д.};$$

поэтому, если вышеприведенные выражения для $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ и $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ разделить на последнее, то получится

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\cdot\text{и т. д.},$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdot\frac{30}{29}\cdot\text{и т. д.}$$

В первом выражении дроби образуются из простых чисел вида $12m+6\pm 1$, во втором — из простых чисел вида $12m\pm 1$, причем каждое из них разбивается на две части, различающиеся на единицу, и четные части берутся в качестве числителей, нечетные же в качестве знаменателей.

295. Рассмотрим еще найденный выше (§ 179) ряд

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\text{ и т. д.}=A;$$

будем иметь

$$\frac{1}{3}A=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{33}-\text{ и т. д.},$$

и вычитание дает

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)A=1-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\text{ и т. д.}=B.$$

Прибавим

$$\frac{1}{5}B=\frac{1}{5}-\frac{1}{25}-\frac{1}{35}+\frac{1}{55}-\text{ и т. д.};$$

получится

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)B=1-\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\text{ и т. д.}=C.$$

Продолжая поступать таким же образом, придем, наконец, к равенству

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{1}{17}\right)\left(1-\frac{1}{19}\right)\text{ и т. д.}=1,$$

где знаки располагаются так, что у простых чисел вида $8m+1$ или $8m+3$ будет знак минус, у простых же чисел вида $8m+5$ или $8m+7$ будет знак плюс. Итак, отсюда

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{24}\cdot\text{ и т. д.},$$

где все знаменатели либо делятся на 8, либо суть только числа нечетно-четные. А так как [§ 285]

$$\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{24}\cdot\text{ и т. д.},$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{18}\cdot\frac{23}{22}\cdot\text{ и т. д}.$$

и, значит,

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdot\text{ и т. д.},$$

то будет

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{20}\cdot\frac{23}{22}\cdot\text{ и т. д.},$$

где не встречаются вовсе знаменатели, делящиеся на 8, но встречаются четно-четные, причем все эти знаменатели отличаются от числителя на единицу [56]. Первое равенство после деления на последнее дает

$$1=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{11}{12}\cdot\text{ и т. д.};$$

эти дроби образуются из простых чисел путем разбиения каждого из них на две части, различающиеся на единицу, причем четные части (если только они не являются четно-четными) берутся в качестве числителей.

296. Подобным образом можно преобразовать в произведения сомножителей, состоящих из простых чисел, остальные ряды, которые мы нашли выше (§ 179 и след.) для выражения дуг круга. Таким же путем можно вывести много других замечательных свойств как этих произведений, так и бесконечных рядов[1]). Так как я здесь уже упомянул главные из них, то не буду останавливаться на выводе многих, а перейду к иному родственному с этим предмету, именно: как в этой главе рассматривались числа в их возникновении из перемножения, так в следующей будет рассмотрено происхождение чисел из сложения.

[1]) Это утверждение требует оговорок. См. вступительную статью А. Шпайзера, стр. 13.

ГЛАВА XVI

О РАЗБИЕНИИ ЧИСЕЛ НА СЛАГАЕМЫЕ [57]

297. Пусть дано выражение

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\varepsilon}z) \text{ и т. д.};$$

исследуем, какой вид оно примет при развертывании путем перемножения. Положим, что получится

$$1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{и т. д.};$$

при этом ясно, что P будет суммой степеней $x^{\alpha}+x^{\beta}+x^{\gamma}+x^{\delta}+$ и т. д. Затем Q будет суммой произведений различных степеней по две, т. е. совокупностью многих степеней x, показатели которых представляют суммы двух различных членов ряда

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \text{ и т. д.}$$

Подобным образом R будет совокупностью степеней x, показатели которых представляют суммы трех различных членов. Далее, S будет совокупностью степеней x, показатели которых являются суммами четырех различных членов того же ряда α, β, γ, δ, ε и т. д., и так далее.

298. Отдельные степени x, входящие в значения букв P, Q, R, S и т. д., будут иметь коэффициентом единицу, если показатели их могут быть образованы из чисел α, β, γ, δ и т. д. единственным способом; если же показатель одной и той же степени может несколькими способами представлять сумму двух, трех или более членов ряда α, β, γ, δ, ε и т. д., то такая степень будет иметь коэффициент, заключающий в себе столько же единиц, сколько существует таких способов. Так, если в значении Q находится Nx^n, то это будет указывать, что число n может быть представлено в виде суммы двух различных членов ряда α, β, γ, δ и т. д. N различными способами. Если при развертывании данного произведения встретится член Nx^nz^m, то его коэффициент N укажет, сколькими различными способами число n может быть представлено в виде суммы m различных членов ряда α, β, γ, δ, ε, ζ и т. д.

299. Итак, если данное произведение

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z) \text{ и т. д.}$$

развернуть путем фактического перемножения, то из полученного выражения тотчас станет видно, сколькими различными способами данное число может быть представлено в виде суммы того или другого числа различных членов ряда

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta \text{ и т. д.}$$

Так, если требуется узнать, сколькими различными способами число n может быть представлено в виде суммы m различных членов этого ряда, то надо в развернутом выражении найти член $x^n z^m$; его коэффициент и укажет искомое число.

300. Для пояснения этого пусть дано бесконечное произведение

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z) \text{ и т. д.},$$

которое при фактическом перемножении дает

$$\begin{aligned}
&1+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+ \text{ и т. д.})\\
&+z^2(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9+4x^{10}+5x^{11}+ \text{ и т. д.})\\
&+z^3(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+10x^{14}+ \text{ и т. д.})\\
&+z^4(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+15x^{18}+ \text{ и т. д.})\\
&+z^5(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}+13x^{22}+18x^{23}+ \text{ и т. д.})\\
&+z^6(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}+14x^{28}+20x^{29}+ \text{ и т. д.})\\
&+z^7(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}+15x^{35}+21x^{36}+ \text{ и т. д.})\\
&+z^8(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}+15x^{43}+22x^{44}+ \text{ и т. д.})\\
&\qquad + \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Из этих рядов сейчас же можно определить, сколькими различными способами может получиться данное число из определенного количества различных членов ряда

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8 \text{ и т. д.}$$

Так, если надо узнать, сколькими способами число 35 может быть представлено в виде суммы семи различных членов ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и т. д., то следует найти в ряде, умноженном на z^7, степень x^{35}; ее коэффициент 15 укажет, что данное число 35 может быть представлено в виде суммы семи членов ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и т. д. пятнадцатью способами.

301. Если положить $z=1$ и подобные степени x собрать в одну сумму или, что сводится к тому же, если развернуть бесконечное выражение

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ и т. д.},$$

то получится ряд

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+ \text{ и т. д.},$$

где каждый коэффициент указывает, сколькими различными способами показатель степени x, получившийся в результате приведения, может возникнуть путем сложения различных чисел ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и т. д.; так, обнаружится, что число 8 может быть получено при сложении различных чисел шестью способами, именно,

$$\begin{aligned}
&8=8, &&8=6+2, &&8=5+2+1,\\
&8=7+1, &&8=5+3, &&8=4+3+1,
\end{aligned}$$

причем следует заметить, что само данное число также должно входить в расчет, так как число членов в каждой сумме не определено, а следовательно, и число 1 [1]) отсюда не исключается [[58]].

302. Отсюда понятно, каким образом получается всякое число путем сложения различных чисел. Условие же, чтобы члены были различными, отпадает, если переставить эти множители в знаменатель. Пусть дано выражение

$$\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)(1-x^{\delta}z)(1-x^{\varepsilon}z)\text{ и т. д.}},$$

которое при развертывании путем деления дает

$$1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{ и т. д.}$$

При этом ясно, что P будет совокупностью степеней x, показатели которых содержатся в ряде

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta\text{ и т. д.}$$

Затем Q будет совокупностью степеней x, показатели которых представляют сумму двух членов этого ряда, одинаковых или различных. Далее, R будет суммой степеней x, показатели коих получаются при сложении трех членов этого ряда. S будет суммой степеней, показатели которых образуются путем сложения четырех членов этого ряда, и т. д.

303. Итак, когда все выражение будет представлено в виде суммы отдельных членов и подобные будут соединены вместе, то будет видно, сколькими различными способами может получиться данное число n путем сложения m различных или одинаковых членов ряда

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta\text{ и т. д.}$$

Надо только найти в развернутом выражении член x^nz^m. Пусть его коэффициент будет N, так что весь член равен Nx^nz^m, тогда коэффициент N укажет, сколькими различными способами можно получить число n посредством сложения m членов ряда α, β, γ, δ, ε и т. д. Этим путем разрешится вопрос, аналогичный тому, который мы рассмотрели раньше.

304. Применим сказанное к следующему особенно замечательному случаю: пусть дано выражение

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\text{ и т. д.}},$$

которое при выполнении деления дает

$$\begin{aligned}
1&+z(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+\text{и т. д.})\\
&+z^2(x^2+x^3+2x^4+2x^5+3x^6+3x^7+4x^8+4x^9+5x^{10}+\text{и т. д.})\\
&+z^3(x^3+x^4+2x^5+3x^6+4x^7+5x^8+7x^9+8x^{10}+10x^{11}+\text{и т. д.})\\
&+z^4(x^4+x^5+2x^6+3x^7+5x^8+6x^9+9x^{10}+11x^{11}+15x^{12}+\text{и т. д.})\\
&+z^5(x^5+x^6+2x^7+3x^8+5x^9+7x^{10}+10x^{11}+13x^{12}+18x^{13}+\text{и т. д.})\\
&+z^6(x^6+x^7+2x^8+3x^9+5x^{10}+7x^{11}+11x^{12}+14x^{13}+20x^{14}+\text{и т. д.})\\
&+z^7(x^7+x^8+2x^9+3x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+11x^{13}+15x^{14}+21x^{15}+\text{и т. д.})\\
&+z^8(x^8+x^9+2x^{10}+3x^{11}+5x^{12}+7x^{13}+11x^{14}+15x^{15}+22x^{16}+\text{и т. д.})\\
&+\text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

[1]) То есть случай $8=8$, когда в сумме всего один член (8).

Из этих рядов тотчас можно определить, сколькими различными способами может получиться данное число путем сложения заданного числа членов ряда

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \text{ и т. д.}$$

Так, чтобы узнать, сколькими различными способами может получиться число 13 путем сложения пяти целых чисел, надо взглянуть на член $x^{13}z^5$; его коэффициент 18 указывает, что данное число 13 может быть получено сложением пяти членов восемнадцатью способами.

305. Если положить $z=1$ и собрать вместе подобные степени x, то выражение

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ и т. д.}}$$

развернется в ряд

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+\text{и т. д.},$$

в котором любой коэффициент указывает, сколькими различными способами показатель соответственной степени может получиться при сложении целых чисел, одинаковых или различных. Так, по члену $11x^6$ видно, что число 6 может быть получено при сложении целых чисел одиннадцатью способами, а именно

$$\begin{array}{ll}
6=6, & 6=3+1+1+1, \\
6=5+1, & 6=2+2+2, \\
6=4+2, & 6=2+2+1+1, \\
6=4+1+1, & 6=2+1+1+1+1, \\
6=3+3, & 6=1+1+1+1+1+1, \\
6=3+2+1, &
\end{array}$$

где также надо заметить, что и само данное число дает один способ, так как оно заключается в ряде чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 и т. д.

306. После этого общего изложения рассмотрим внимательнее, как найти число этих соединений. Рассмотрим сначала такое соединение целых чисел, в котором допускаются только различные числа и о котором мы говорили раньше. Пусть для этой цели дано выражение

$$Z=(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z) \text{ и т. д.},$$

которое, будучи развернуто и расположено по степеням z, дает

$$Z=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+Tz^5+\text{и т. д.};$$

надо найти способ быстрого получения функций P, Q, R, S, T и т. д. переменного x; этим путем можно дать наилучший ответ на поставленный вопрос.

307. Ясно, что если вместо z подставить xz, то получится

$$(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z) \text{ и т. д.}=\frac{Z}{1+xz};$$

значит, при подстановке xz вместо z значение произведения, которое было Z, перейдет в $\frac{Z}{1+xz}$, и так как

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{и т. д.},$$

то будет

$$\frac{Z}{1+xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \text{и т. д.}$$

Производя фактически умножение на $1+xz$, получим

$$\begin{aligned} Z = 1 &+ Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \text{и т. д.} \\ &+ xz \quad + Px^2z^2 + Qx^3z^3 + Rx^4z^4 + \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Сравнение этого значения Z с вышеуказанным дает

$$P = \frac{x}{1-x}, \quad Q = \frac{Px^2}{1-x^2}, \quad R = \frac{Qx^3}{1-x^3}, \quad S = \frac{Rx^4}{1-x^4} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, для P, Q, R, S и т. д. получаются такие значения:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{1-x}, \\ Q &= \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}, \\ R &= \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}, \\ S &= \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}, \\ T &= \frac{x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

308. Итак, мы можем этим способом выразить в отдельности любой ряд степеней x, по которому можно определить, сколькими различными способами может быть образовано данное число из заданного же количества целых частей путем сложения. Далее ясно, что эти отдельные ряды будут рекуррентными, потому что они образуются при развертывании в ряд дробной функции x. Так, первое выражение

$$P = \frac{x}{1-x}$$

дает геометрический ряд

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{и т. д.},$$

из которого ясно, что любое число будет содержаться по одному разу в ряде целых чисел.

309. Второе выражение

$$\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

дает ряд

$$x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \text{и т. д.},$$

в котором коэффициент любого члена показывает, сколькими способами показатель x может быть разбит на две неравные части. Так, член $4x^9$

указывает, что число 9 может быть разбито на две неодинаковые части четырьмя способами. Если разделить этот ряд на x^3, то получится ряд

$$1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+\text{и т. д.},$$

доставляемый дробью

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)};$$

общий член ряда равен Nx^n; из происхождения этого ряда видим, что коэффициент N указывает, сколькими различными способами может получиться показатель n путем сложения из чисел 1 и 2. Так как общий член предыдущего ряда был равен Nx^{n+3}, то отсюда выводится такая теорема:

Сколькими различными способами число n может получиться путем сложения из чисел 1 *и* 2, *столькими же различными способами число $n+3$ может быть разбито на две неравные части.*

310. Третье выражение

$$\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

при развертывании в ряд дает

$$x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}+8x^{13}+\text{и т. д.},$$

где коэффициент любого члена указывает, сколькими различными способами показатель соответственной степени x может быть разбит на три неравные части. Если же развернуть дробь

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

то получится ряд

$$1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+8x^7+\text{и т. д.};$$

если общий его член положить равным Nx^n, то коэффициент N укажет, сколькими различными способами может получиться число n путем сложения из чисел 1, 2, 3. Так как общий член предыдущего ряда равен Nx^{n+6}, то выводом отсюда будет теорема:

Сколькими различными способами может получиться число n путем сложения из чисел 1, 2, 3, *столькими же различными способами может быть разбито число $n+6$ на три неравные части.*

311. Четвертое выражение

$$\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

при развертывании в рекуррентный ряд дает

$$x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}+11x^{17}+\text{и т. д.},$$

где коэффициент любого члена указывает, сколькими различными способами показатель соответственной степени может быть разбит на четыре неравные части. Если же развернуть выражение

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},$$

то получится вышеуказанный ряд, разделенный на x^{10}, именно,

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+6x^5+9x^6+11x^7+\text{и т. д.};$$

пусть общий его член равен Nx^n; ясно, что коэффициент N указывает, сколькими различными способами может получиться число n путем сложения из четырех чисел 1, 2, 3, 4. Так как общий член прежнего будет равен Nx^{n+10}, то получается теорема:

Сколькими различными способами может получиться число n путем сложения из чисел 1, 2, 3, 4, столькими же различными способами может быть разбито число $n+10$ на четыре неравные части.

312. Вообще, если выражение

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)}$$

развернуть в ряд, общий член которого равен Nx^n, то коэффициент N укажет, сколькими различными способами может получиться число n при сложении чисел 1, 2, 3, 4, ..., m. Если же развернуть выражение

$$\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)},$$

то общий его член будет равен $Nx^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$; здесь коэффициент N укажет, сколькими различными способами число $n+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}$ может быть разбито на m неравных частей. Отсюда вытекает теорема:

Сколькими различными способами может получиться число n путем сложения из чисел 1, 2, 3, 4, ..., m, столькими же способами может быть разбито число $n+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}$ на m неравных частей.

313. Изложив разбиение чисел на неравные части, рассмотрим такие разбиения, где не исключается равенство частей; эти разбиения получаются из выражения

$$Z=\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ \text{и т. д.}}.$$

Пусть при развертывании путем деления получится

$$Z=1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+Tz^5+\text{и т. д.}$$

Ясно, что если вместо z подставить xz, то получится

$$\frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)}=(1-xz)Z.$$

Произведя в развернутом ряде ту же подстановку, получим

$$(1-xz)Z=1+Pxz+Qx^2z^2+Rx^3z^3+Sx^4z^4+\text{и т. д.}$$

Помножив ряд для Z на $1-xz$, найдем

$$\begin{aligned}(1-xz)Z=1&+Pz+Qz^2+Rz^3-Sz^4+\text{и т. д.}\\ &-xz-Pxz^2-Qxz^3-Rxz^4-\text{и т. д.}\end{aligned}$$

Сравнение дает

$$P=\frac{x}{1-x},\quad Q=\frac{Px}{1-x^2},\quad R=\frac{Qx}{1-x^3},\ S=\frac{Rx}{1-x^4}\ \text{и т. д.},$$

откуда для P, Q, R, S и т. д. получаются следующие значения:

$$P=\frac{x}{1-x},$$

$$Q=\frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)},$$

$$R=\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

$$S=\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

и т. д.

314. Выражения эти отличаются от приведенных выше только тем, что здесь числители имеют меньшие показатели, чем в предыдущем случае. Поэтому ряды, получающиеся при развертывании, в отношении коэффициентов совершенно сходны, что видно было из сравнения § 300 и 304, но лишь теперь становится понятной причина этого. Отсюда вытекают теоремы, подобные полученным ранее, а именно:

Сколькими различными способами может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, столькими же способами можно разбить число $n+2$ на две части.

Сколькими различными способами может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, столькими же способами можно разбить число $n+3$ на три части.

Сколькими различными способами может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, 4, столькими же способами можно разбить число $n+4$ на четыре части.

И вообще будет иметь место теорема:

Сколькими различными способами может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, ..., m, столькими же способами можно разбить число $n+m$ на m частей.

315. Если же спрашивается, сколькими способами можно разбить данное число на m неравных частей или на m частей как неравных, так и равных, то оба вопроса разрешатся, если будет известно, сколькими способами может получиться путем сложения всякое число из чисел 1, 2, 3, 4, ..., m; это видно из следующих теорем, которые выведены из предыдущих.

Число n можно разбить на m неравных частей столькими способами, сколькими может получиться путем сложения число $n-\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}$ из чисел 1, 2, 3, 4, ..., m.

Число n можно разбить на m равных или неравных частей столькими способами, сколькими может получиться путем сложения число $n-m$ из чисел 1, 2, 3, ..., m.

Отсюда, далее, следуют теоремы:

Число n можно разбить на m неравных частей столькими способами, сколькими число $n-\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ можно разбить на m равных или неравных частей.

Число n можно разбить на m неравных или равных частей столькими способами, сколькими число $n+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ можно разбить на m неравных частей.

316. Образуя рекуррентные ряды, можно найти, сколькими различными способами может получиться путем сложения данное число n из чисел 1, 2, 3, ..., m. Для этого надо развернуть дробь

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)}$$

в рекуррентный ряд и продолжить его вплоть до члена Nx^n; коэффициент N укажет, сколькими способами может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, 4, ..., m. Но этот способ решения будет представлять немалую трудность, даже если числа m и n будут умеренно большими; именно, шкала отношения, которую дает знаменатель, развернутый путем умножения, состоит из большого числа членов; поэтому продолжить ряд достаточно далеко весьма затруднительно.

317. Однако это исследование будет менее трудным, если сначала разобрать более легкие случаи; от них уже легко будет перейти к случаям более сложным. Пусть общий член ряда, который получается из дроби

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)},$$

будет равен Nx^n, и член ряда, получаемого из

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)},$$

будет Mx^n; здесь коэффициент M укажет, сколькими различными способами может получиться путем сложения число $n-m$ из чисел 1, 2, 3, ..., m. Вычтем второе выражение из первого; останется

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{m-1})};$$

ясно, что общий член ряда, который получится отсюда, будет $(N-M)x^n$; поэтому коэффициент $N-M$ укажет, сколькими различными способами можно получить путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, ..., $m-1$.

318. Стало быть, отсюда получаем следующее правило:

Пусть L будет число способов, посредством которых может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, ..., $m-1$;

пусть M будет число способов, посредством которых может получиться путем сложения число $n-m$ из чисел 1, 2, 3, ..., m;

пусть N будет число способов, посредством которых может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, ..., m.

Тогда, как мы видели, будет

$$L=N-M,$$

и, стало быть,

$$N=L+M.$$

Поэтому, если мы нашли, сколькими различными способами могут получиться числа n и $n-m$ путем сложения, первое — из чисел 1, 2, Таблица

n	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97	99
14	1	8	24	47	70	90	105	116	123	128	131
15	1	8	27	54	84	110	131	146	157	164	169
16	1	9	30	64	101	136	164	186	201	212	219
17	1	9	33	72	119	163	201	230	252	267	278
18	1	10	37	84	141	199	248	288	318	340	355
19	1	10	40	94	164	235	300	352	393	423	445
20	1	11	44	108	192	282	364	434	488	530	560
21	1	11	48	120	221	331	436	525	598	653	695
22	1	12	52	136	255	391	522	638	732	807	863
23	1	12	56	150	291	454	618	764	887	984	1060
24	1	13	61	169	333	532	733	919	1076	1204	1303
25	1	13	65	185	377	612	860	1090	1291	1455	1586
26	1	14	70	206	427	709	1009	1297	1549	1761	1930
27	1	14	75	225	480	811	1175	1527	1845	2112	2331
28	1	15	80	249	540	931	1367	1801	2194	2534	2812
29	1	15	85	270	603	1057	1579	2104	2592	3015	3370
30	1	16	91	297	674	1206	1824	2462	3060	3590	4035
31	1	16	96	321	748	1360	2093	2857	3589	4242	4802
32	1	17	102	351	831	1540	2400	3319	4206	5013	5708
33	1	17	108	378	918	1729	2738	3828	4904	5888	6751
34	1	18	114	411	1014	1945	3120	4417	5708	6912	7972
35	1	18	120	441	1115	2172	3539	5066	6615	8070	9373
36	1	19	127	478	1226	2432	4011	5812	7657	9418	11004
37	1	19	133	511	1342	2702	4526	6630	8824	10936	12866
38	1	20	140	551	1469	3009	5102	7564	10156	12690	15021
39	1	20	147	588	1602	3331	5731	8588	11648	14663	17475
40	1	21	154	632	1747	3692	6430	9749	13338	16928	20298
41	1	21	161	672	1898	4070	7190	11018	15224	19466	23501
42	1	22	169	720	2062	4494	8033	12450	17354	22367	27169
43	1	22	176	764	2233	4935	8946	14012	19720	25608	31316
44	1	23	184	816	2418	5427	9953	15765	22380	29292	36043
45	1	23	192	864	2611	5942	11044	17674	25331	33401	41373
46	1	24	200	920	2818	6510	12241	19805	28629	28047	47420
47	1	24	208	972	3034	7104	13534	22122	32278	43214	54218
48	1	25	217	1033	3266	7760	14950	24699	36347	49037	61903
49	1	25	225	1089	3507	8442	16475	27493	40831	55494	70515
50	1	26	234	1154	3765	9192	18138	30588	45812	62740	80215
51	1	26	243	1215	4033	9975	19928	33940	51294	70760	91058
52	1	27	252	1285	4319	10829	21873	37638	57358	79725	103226
53	1	27	261	1350	4616	11720	23961	41635	64015	89623	116792
54	1	28	271	1425	4932	12692	26226	46031	71362	100654	131970
55	1	28	280	1495	5260	13702	28652	50774	79403	112804	148847
56	1	29	290	1575	5608	14800	31275	55974	88252	126299	167672
57	1	29	300	1650	5969	15944	34082	61575	97922	141136	188556
58	1	30	310	1735	6351	17180	37108	67696	108527	157564	211782
59	1	30	320	1815	6747	18467	40340	74280	120092	175586	237489

Число n можно разбить на m неравных или равных частей столькими способами, сколькими число $n+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ можно разбить на m неравных частей.

316. Образуя рекуррентные ряды, можно найти, сколькими различными способами может получиться путем сложения данное число n из чисел 1, 2, 3, ..., m. Для этого надо развернуть дробь

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)}$$

в рекуррентный ряд и продолжить его вплоть до члена Nx^n; коэффициент N укажет, сколькими способами может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, 4, ..., m. Но этот способ решения будет представлять немалую трудность, даже если числа m и n будут умеренно большими; именно, шкала отношения, которую дает знаменатель, развернутый путем умножения, состоит из большого числа членов; поэтому продолжить ряд достаточно далеко весьма затруднительно.

317. Однако это исследование будет менее трудным, если сначала разобрать более легкие случаи; от них уже легко будет перейти к случаям более сложным. Пусть общий член ряда, который получается из дроби

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)},$$

будет равен Nx^n, и член ряда, получаемого из

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^m)},$$

будет Mx^n; здесь коэффициент M укажет, сколькими различными способами может получиться путем сложения число $n-m$ из чисел 1, 2, 3, ..., m. Вычтем второе выражение из первого; останется

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^{m-1})};$$

ясно, что общий член ряда, который получится отсюда, будет $(N-M)x^n$; поэтому коэффициент $N-M$ укажет, сколькими различными способами можно получить путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, ..., $m-1$.

318. Стало быть, отсюда получаем следующее правило:

Пусть L будет число способов, посредством которых может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, ..., $m-1$;

пусть M будет число способов, посредством которых может получиться путем сложения число $n-m$ из чисел 1, 2, 3, ..., m;

пусть N будет число способов, посредством которых может получиться путем сложения число n из чисел 1, 2, 3, ..., m.

Тогда, как мы видели, будет

$$L=N-M,$$

и, стало быть,

$$N=L+M.$$

Поэтому, если мы нашли, сколькими различными способами могут получиться числа n и $n-m$ путем сложения, первое — из чисел 1, 2, откуда видно, что коэффициенты этого ряда составляют ряд натуральных чисел. Отсюда, полагая $x=1$, видим, что при сложении членов второго ряда таблицы по два получится ряд натуральных чисел:

$$1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+6+6+ \text{ и т. д.},$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+ \text{ и т. д.}$$

Итак, обратно, из ряда натуральных чисел находится вышеуказанный, если отнять каждый член вышестоящего ряда от следующего члена нижестоящего.

320. Третий вертикальный ряд получается из дроби

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}.$$

Но так как

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{(1+x)(1+x+x^2)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)},$$

то ясно, что если сначала сложить по три члена этого ряда, а затем опять по два члена нового, полученного таким путем ряда, то должны получиться треугольные числа [62], как это видно из следующей схемы:

$$1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+14+16+19+ \text{ и т. д.},$$
$$1+2+4+6+9+12+16+20+25+30+36+42+49+ \text{ и т. д.},$$
$$1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+66+78+91+ \text{ и т. д.}$$

И обратно, видно, каким образом должен получиться вышеуказанный ряд из ряда треугольных чисел.

321. Подобным же образом, так как четвертый ряд получается из дроби

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)},$$

то будет

$$\frac{(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}=\frac{1}{(1-x)^4}.$$

Если в четвертом ряде сначала сложить члены по четыре, а затем в полученном ряде по три и, наконец, в последнем по два, то получится ряд пирамидальных чисел, как можно видеть из следующего:

$$1+1+2+3+5+6+9+11+15+18+23+27+ \text{ и т. д.},$$
$$1+2+4+7+11+16+23+31+41+53+67+83+ \text{ и т. д.},$$
$$1+3+7+13+22+34+50+70+95+125+161+203+ \text{ и т. д.},$$
$$1+4+10+20+35+56+84+120+165+220+286+364+ \text{ и т. д.}$$

Подобным же образом пятый ряд приведет к пирамидальным числам второго порядка, шестой — к числам третьего порядка, и так далее.

[*Продолжение таблицы*]

n	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
60	1	31	331	1906	7166	19858	43819	81457	132751	195491	266006
61	1	31	341	1991	7599	21301	47527	89162	146520	217280	297495
62	1	32	352	2087	8056	22856	51508	97539	161554	241279	332337
63	1	32	363	2178	8529	24473	55748	106522	177884	267507	370733
64	1	33	374	2280	9027	26207	60289	116263	195666	296320	413112
65	1	33	385	2376	9542	28009	65117	126692	214944	327748	459718
66	1	34	397	2484	10083	29941	70281	137977	235899	362198	511045
67	1	34	408	2586	10642	31943	75762	150042	258569	399705	567377
68	1	35	420	2700	11229	34085	81612	163069	283161	440725	629281
69	1	35	432	2808	11835	36308	87816	176978	309729	485315	697097

3, $\ldots$, $m-1$, а второе — из чисел 1, 2, 3, $\ldots$, m, то, складывая, узнаем, сколькими различными способами может получиться число n при сложении чисел 1, 2, 3, $\ldots$, m. При помощи этой теоремы всегда можно будет перейти от простейших случаев, не представляющих никакой трудности, к более сложным; этим путем составлена приложенная здесь таблица [59], употребление которой состоит в следующем.

Если надо узнать, сколькими различными способами можно разбить число 50 на 7 неравных частей, то в первом вертикальном столбце берем число $50-\frac{7\cdot 8}{2}=22$, в верхней же горизонтальной строке — римскую цифру VII; тогда число, находящееся на месте их пересечения, а именно 522, укажет искомое число способов.

Если же спрашивается, сколькими различными способами можно разбить число 50 на 7 равных или неравных частей, то в первом вертикальном столбце берем число $50-7=43$, которому в седьмом столбце соответствует искомое число 8946 [60].

319. Вертикальные ряды этой таблицы хотя и являются рекуррентными, однако имеют очень тесную связь с числами натуральными, треугольными, пирамидальными и последующими [61]; имеет смысл вкратце изложить эту связь. Так как из дроби

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

получается ряд

$$1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+ \text{ и т. д.},$$

а из дроби

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$

— ряд

$$x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+3x^6+ \text{ и т. д.},$$

то, складывая эти два ряда, получим ряд

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+7x^6+ \text{ и т. д.},$$

который получается путем деления из дроби

$$\frac{1+x}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

то при развертывании дроби

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7) \text{ и т. д.}}$$

в рекуррентный ряд получим

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+30x^9+42x^{10}+56x^{11}+$$
$$+77x^{12}+101x^{13}+135x^{14}+176x^{15}+231x^{16}+297x^{17}+385x^{18}+490x^{19}+$$
$$+627x^{20}+792x^{21}+1002x^{22}+1255x^{23}+1575x^{24}+ \quad \text{и т. д.}$$ [1])

Итак, каждый коэффициент этого ряда указывает, сколькими различными способами показатель x может получиться из целых чисел путем сложения. Так, число 7 может получиться путем сложения пятнадцатью способами:

$7=7,$	$7=4+2+1,$	$7=3+1+1+1+1,$
$7=6+1,$	$7=4+1+1+1,$	$7=2+2+2+1,$
$7=5+2,$	$7=3+3+1,$	$7=2+2+1+1+1,$
$7=5+1+1,$	$7=3+2+2,$	$7=2+1+1+1+1+1,$
$7=4+3,$	$7=3+2+1+1,$	$7=1+1+1+1+1+1+1.$

325. Если же развернуть произведение

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ и т. д.},$$

то получится ряд

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+ \text{ и т. д.},$$

в котором каждый коэффициент указывает, сколькими различными способами может получиться путем сложения показатель x из неодинаковых чисел. Так, число 9 может получиться при сложении неодинаковых чисел восемью различными способами:

$9=9,$	$9=6+2+1,$
$9=8+1,$	$9=5+4,$
$9=7+2,$	$9=5+3+1,$
$9=6+3,$	$9=4+3+2.$

326. Для сравнения этих выражений положим

$$P=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ и т. д.}$$

и

$$Q=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ и т. д.};$$

тогда

$$PQ=(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})(1-x^{12}) \text{ и т. д.};$$

так как все эти множители заключаются в P, то разделим P на PQ; получится

$$\frac{1}{Q}=(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9) \text{ и т. д.},$$

---

[1]) Коэффициенты при x^{23} и x^{24} исправлены по Opera omnia.

322. Следовательно, обратно, из фигурных чисел могут быть образованы ряды, встречающиеся в таблице, посредством операций, которые сами собой выясняются при рассмотрении следующего вычисления:

$$\left.\begin{array}{l} 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+\text{ и т. д.} \\ 1+1+2+2+3+3+4+4+5+5+\text{ и т. д.} \end{array}\right\} \quad \text{II}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+\text{ и т. д.} \\ 1+2+4+6+9+12+16+20+25+30+\text{ и т. д.} \\ 1+1+2+3+4+5+7+8+10+12+\text{ и т. д.} \end{array}\right\} \quad \text{III}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+4+10+20+35+56+84+120+165+220+\text{ и т. д.} \\ 1+3+7+13+22+34+50+70+95+125+\text{ и т. д.} \\ 1+2+4+7+11+16+23+31+41+53+\text{ и т. д.} \\ 1+1+2+3+5+6+9+11+15+18+\text{ и т. д.} \end{array}\right\} \quad \text{IV}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1+5+15+35+70+126+210+330+495+715+\text{ и т. д.} \\ 1+4+11+24+46+80+130+200+295+420+\text{ и т. д.} \\ 1+3+7+14+25+41+64+95+136+189+\text{ и т. д.} \\ 1+2+4+7+12+18+27+38+53+71+\text{ и т. д.} \\ 1+1+2+3+5+7+10+13+18+23+\text{ и т. д.} \end{array}\right\} \quad \text{V}$$

и т. д.

Здесь первые ряды представляют фигурные числа; отнимая любой член второго ряда от следующего члена первого, составляем второй ряд. Затем отнимаем по два члена вместе третьего ряда от следующего члена второго; таким образом, получается третий ряд; этим же способом, отнимая, далее, сумму трех, четырех и так далее членов от следующего члена вышестоящего ряда, мы составим остальные ряды, пока не дойдем до ряда, начинающегося с $1+1+2+$ и т. д.; это и будет ряд, данный в таблице на стр. 243—244 [63].

323. Вертикальные ряды этой таблицы начинаются все одинаково и чем дальше, тем больше имеют вначале общих членов. Из этого видно, что в бесконечности ряды эти друг с другом совершенно совпадут. Получится ряд, возникающий из дроби

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\text{ и т. д.}};$$

так как он рекуррентный, то сперва надо рассмотреть знаменатели для получения отсюда шкалы отношения.

Если перемножить сомножители знаменателя, то получится

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+x^{51}+\text{ и т. д.}$$

При более внимательном рассмотрении этого ряда оказывается, что в нем содержатся только такие степени x, показатели которых заключаются в выражении вида $\frac{3n^2 \pm n}{2}$; при этом степени будут отрицательны, где n нечетное, и положительны при n четном [64].

324. Так как шкала отношения есть

$+1,\ +1,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ +1,\ 0,\ 0,\ +1,\ 0,\ 0$ и т. д., в котором показатели x возрастают вдвое. При развертывании этого выражения получается ряд

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+ \text{ и т. д.}$$

Так как здесь может возникнуть сомнение, будет ли этот ряд идти до бесконечности по геометрическому закону, то придется его исследовать. Пусть

$$P=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \text{ и т. д.},$$

и при развертывании получается ряд

$$P=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\theta x^8+ \text{ и т. д.}$$

Ясно, что если вместо x написать x^2, то получится произведение

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32}) \text{ и т. д.} = \frac{P}{1+x}.$$

Произведя такую же подстановку в развернутом ряде, получим

$$\frac{P}{1+x}=1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\varepsilon x^{10}+\zeta x^{12}+ \text{ и т. д.};$$

помножим на $1+x$; тогда

$$P=1+x+\alpha x^2+\alpha x^3+\beta x^4+\beta x^5+\gamma x^6+\gamma x^7+\delta x^8+\delta x^9+ \text{ и т. д.}$$

При сравнении этого значения P с указанным выше получится

$$\alpha=1,\ \beta=\alpha,\ \gamma=\alpha,\ \delta=\beta,\ \varepsilon=\beta,\ \zeta=\gamma,\ \eta=\gamma \text{ и т. д.};$$

стало быть, все коэффициенты будут равны единице, и поэтому развертывание данного произведения P даст геометрический ряд

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+ \text{ и т. д.}$$

329. Так как здесь встречаются все степени x, и каждая по одному разу, то из вида произведения

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32}) \text{ и т. д.}$$

следует, что всякое целое число может быть получено из различных членов двойной[1]) геометрической прогрессии

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,\quad 16,\quad 32 \text{ и т. д.}$$

путем сложения, и притом единственным способом.

Это свойство известно из практики взвешивания; так, если имеются гири в 1, 2, 4, 8, 16, 32 и т. д. фунтов, то этими гирями можно взвешивать все грузы, если не требуются доли фунта [65]. Так, десятью гирями 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 фунтов можно взвешивать все грузы вплоть до 1024 фунтов, а если прибавить одну гирю в 1024 фунта, то этого будет достаточно для взвешивания всех грузов вплоть до 2048 фунтов.

330. Более того, из практики взвешивания известно, что даже при помощи меньшего числа гирь, возрастающих в тройной[2]) геометрической прогрессии, именно,

$$1,\quad 3,\quad 9,\quad 27,\quad 81 \text{ и т. д. фунтов},$$

[1]) То есть со знаменателем 2.

[2]) То есть со знаменателем 3.

также можно взвешивать все грузы, если не нужны доли. Но при таком взвешивании грузы, если это требуется, надо накладывать не на одну только чашку, а на обе [66]. Это основано на том, что из членов тройной геометрической прогрессии 1, 3, 9, 27, 81 и т. д., если брать только различные члены, можно получить путем сложения и вычитания все решительно числа; так, например,

$$\begin{array}{lll} 1=1, & 5=9-3-1, & 9=9, \\ 2=3-1, & 6=9-3, & 10=9+1, \\ 3=3, & 7=9-3+1, & 11=9+3-1, \\ 4=3+1, & 8=9-1, & 12=9+3 \end{array}$$

и т. д.

331. Чтобы показать истинность этого, я рассмотрю такое бесконечное произведение:

$$(x^{-1}+1+x^1)(x^{-3}+1+x^3)(x^{-9}+1+x^9)(x^{-27}+1+x^{27}) \text{ и т. д.} = P;$$

при развертывании оно даст только такие степени x, которые могут быть образованы из чисел 1, 3, 9, 27, 81 и т. д. путем сложения или вычитания. Для того чтобы узнать, получатся ли в самом деле все степени, каждая по одному разу, я поступлю так. Пусть

$$P = \text{и т. д.} + cx^{-3} + bx^{-2} + ax^{-1} + 1 + \alpha x^1 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{и т. д.};$$

ясно, что если написать x^3 вместо x, то получится

$$\frac{P}{x^{-1}+1+x^1} = \text{и т. д.} + bx^{-6} + ax^{-3} + 1 + \alpha x^3 + \beta x^6 + \gamma x^9 + \text{и т. д.}$$

Отсюда находим

$$P = \text{и т. д.} + ax^{-4} + ax^{-3} + ax^{-2} + x^{-1} + 1 + x + \alpha x^2 + \alpha x^3 + \alpha x^4 + \beta x^5 + \beta x^6 + \\ + \beta x^7 + \text{и т. д.};$$

это выражение при сравнении с вышеуказанным дает

$$\alpha = 1, \quad \beta = \alpha, \quad \gamma = \alpha, \quad \delta = \alpha, \quad \varepsilon = \beta, \quad \zeta = \beta \text{ и т. д.}$$

и

$$a = 1, \quad b = a, \quad c = a, \quad d = a, \quad e = b \text{ и т. д.}$$

Итак, отсюда

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{и т. д.} \\ + x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} + \text{и т. д.}$$

Ясно, что здесь будут встречаться все степени x, как положительные, так и отрицательные, и что, следовательно, можно получить все числа из членов тройной геометрической прогрессии путем сложения или вычитания, причем каждое число одним только способом.

ГЛАВА XVII

О ПРИМЕНЕНИИ РЕКУРРЕНТНЫХ РЯДОВ К ОТЫСКАНИЮ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЙ

332. Достославный Даниил Бернулли указал в Записках Петербургской академии, т. III на замечательное применение рекуррентных рядов к нахождению корней уравнений любой степени [67]; он показал, каким образом при помощи рекуррентных рядов можно выразить весьма близко к истине значения корней любого алгебраического уравнения какой бы то ни было степени. Так как это открытие часто приносит весьма большую пользу, то я решил изложить его здесь более обстоятельно, чтобы было видно, в каких случаях его можно применять. Дело в том, что иногда сверх ожидания оказывается, что посредством этого метода нельзя узнать никакого корня уравнения. Поэтому для более ясного представления силы этого метода исследуем, на основании свойств рекуррентных рядов, весь фундамент, на который он опирается.

333. Так как всякий рекуррентный ряд получается из развертывания некоторой рациональной дроби, то пусть эта дробь будет равна

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+\text{и т. д.}}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\text{и т. д.}},$$

откуда получается рекуррентный ряд

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+Fz^5+\text{и т. д.};$$

его коэффициенты A, B, C, D и т. д. определятся так:

$$A=a, \quad B=\alpha A+b, \quad C=\alpha B+\beta A+c,$$

$$D=\alpha C+\beta B+\gamma A+d, \quad E=\alpha D+\beta C+\gamma B+\delta A+e$$

и т. д.

Общий же член, т. е. коэффициент степени z^n, найдется из разложения данной дроби на простые дроби, знаменатели коих являются множителями знаменателя

$$1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{и т. д.},$$

как показано в гл. XIII.

334. Вид общего члена зависит, главным образом, от свойств простых множителей знаменателя, будут ли они действительными или мнимыми, а также от того, будут ли они отличны друг от друга или два и

более будут одинаковыми. Для последовательного рассмотрения этих различных случаев положим вначале, что все простые множители знаменателя действительны и не равны между собой. Пусть все простые множители знаменателя будут

$$(1-pz)(1-qz)(1-rz)(1-sz) \text{ и т. д.}$$

и тогда данная дробь разложится на следующие простые дроби:

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz}+\frac{\mathfrak{B}}{1-qz}+\frac{\mathfrak{C}}{1-rz}+\frac{\mathfrak{D}}{1-sz}+ \text{ и т. д.}$$

Когда они найдены, то общий член рекуррентного ряда будет равен

$$z^n(\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n+\mathfrak{D}s^n+\text{и т. д.});$$

примем его равным Pz^n; значит, P будет коэффициентом степени z^n; у следующих же членов пусть коэффициенты будут Q, R и т. д., так что рекуррентный ряд будет

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+ \ \ldots \ +Pz^n+Qz^{n+1}+Rz^{n+2}+\text{и т. д.}$$

335. Теперь положим, что n представляет чрезвычайно большое число, т. е. что рекуррентный ряд продолжен весьма далеко; так как степени неравных чисел тем более отличаются друг от друга, чем они больше, то между степенями $\mathfrak{A}p^n$, $\mathfrak{B}q^n$, $\mathfrak{C}r^n$ и т. д. будет такое различие, что степень, соответствующая наибольшему из чисел p, q, r и т. д., по величине далеко превзойдет остальные, и те по сравнению с нею почти исчезнут, если n будет числом как бы бесконечно большим. Так как числа p, q, r и т. д. между собой не равны, то пусть p будет наибольшим среди них. Тогда, если n будет числом бесконечно большим, будем иметь

$$P=\mathfrak{A}p^n,$$

если же n будет числом не бесконечно, а лишь очень большим, то только приближенно будет $P=\mathfrak{A}p^n$. Подобным образом будет $Q=\mathfrak{A}p^{n+1}$, и, следовательно,

$$\frac{Q}{P}=p.$$

Отсюда ясно, что если рекуррентный ряд продолжить достаточно далеко, то коэффициент любого члена при делении на предыдущий дает приближенное значение наибольшей буквы p.

336. Итак, если у данной дроби

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\text{и т. д.}}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\text{и т. д.}}$$

в знаменателе все сомножители простые, действительные и не равные между собой, то из получающегося отсюда рекуррентного ряда можно будет узнать один простой множитель, именно, $1-pz$, в котором буква p имеет самое большое значение. При этом коэффициенты числителя a, b, c, d и т. д. не играют роли, и, каковы бы они ни были, для наибольшей буквы p найдется одно и то же верное значение. Верное же значение p обнаружится лишь тогда, когда ряд будет продолжен до бесконечности; когда получены уже многие его члены, то значение p найдется тем ближе, чем больше будет число членов и чем более буква p превосходит остальные q, r, s и т. д.; при этом безразлично, будет ли эта буква p сопровождаться знаком плюс или минус, так как степени ее возрастают одинаково.

337. Теперь в достаточной степени выясняется, каким образом это исследование может быть применено к нахождению корней какого-либо алгебраического уравнения. Зная множители знаменателя

$$1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\text{ и т. д.},$$

легко указать корни уравнения

$$1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\text{ и т. д.}=0,$$

так что, если множитель будет $1-pz$, то один корень этого уравнения будет $z=\frac{1}{p}$. Так как из рекуррентного ряда найдется наибольшее число p, то тем самым получится наименьший корень уравнения

$$1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{ и т. д.}=0.$$

Или если положить $z=\frac{1}{x}$, чтобы получилось уравнение

$$x^m-\alpha x^{m-1}-\beta x^{m-2}-\gamma x^{m-3}-\text{ и т. д.}=0,$$

то посредством того же метода получится наибольший корень этого уравнения $x=p$.

338. Итак, пусть дано уравнение

$$x^m-\alpha x^{m-1}-\beta x^{m-2}-\gamma x^{m-3}-\text{ и т. д.}=0,$$

у которого все корни действительны и не равны между собой; наибольший из этих корней найдется следующим образом. Составим из коэффициентов этого уравнения дробь

$$\frac{a+bz+cz^2+dz^3+\text{ и т. д.}}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\text{и т. д.}}$$

и отсюда образуем рекуррентный ряд, беря числитель произвольно или, что то же, принимая начальные члены произвольными; пусть этот ряд есть

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\ \ldots\ +Pz^n+Qz^{n+1}+\text{ и т. д.}$$

Тогда дробь $\frac{Q}{P}$ даст значение наибольшего корня x данного уравнения тем ближе, чем больше число n.

ПРИМЕР 1

Пусть дано уравнение

$$x^2-3x-1=0;$$

надо найти наибольший его корень.

Составим дробь

$$\frac{a+bz}{1-3z-z^2},$$

откуда, взяв в качестве первых двух членов 1, 2, получим рекуррентный ряд

$$1,\ 2,\ 7,\ 23,\ 76,\ 251,\ 829,\ 2738\text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$\frac{2738}{829}$$

будет приближенно равно наибольшему корню данного уравнения. Значение же этой дроби в десятичных долях есть

$$3{,}3027744.$$

Истинный же максимальный корень уравнения равен

$$\frac{3+\sqrt{13}}{2}=3{,}3027756;$$

он превышает найденный только на одну миллионную часть. Следует, кроме того, заметить, что дроби $\frac{Q}{P}$ будут попеременно то больше, то меньше истинной величины корня.

ПРИМЕР 2

Пусть дано уравнение

$$3x-4x^3=\frac{1}{2},$$

корни которого выражают синусы таких трех дуг, что утроенный синус каждой из них равен $\frac{1}{2}$.

Приведя уравнение к виду

$$0=1-6x*+8x^3\ [1]),$$

станем искать наименьший корень, чтобы остаться при целых числах и не иметь надобности вместо x подставлять $\frac{1}{z}$. Составим дробь

$$\frac{a+bx+cx^2}{1-6x*+8x^3},$$

из которой, взяв произвольно в качестве начальных трех членов 0, 0, 1, так как этим путем вычисление очень облегчается, получим следующий рекуррентный ряд, причем мы опустим самые степени x, потому что нужны только коэффициенты:

$$0,\ 0,\ 1,\ 6,\ 36,\ 208,\ 1200,\ 6912,\ 39\,808,\ 229\,248.$$

Таким образом, наименьший корень уравнения приближенно равен

$$\frac{39\,808}{229\,248}=\frac{311}{1791}=0{,}173\,6460$$

и должен быть синусом угла 10°; этот же синус по таблицам равен 0,173 6482; он превышает найденный корень на $\frac{22}{10\,000\,000}$ [2]).

Тот же корень можно найти легче, положив $x=\frac{1}{2}y$, что приводит к уравнению

$$1-3y*+y^3=0;$$

[1]) Звездочкой Эйлер отмечает отсутствие члена следующей по порядку степени, в данном случае x^2.

[2]) Эти числовые результаты исправлены в соответствии с Opera omnia.

поступая с ним таким же образом, получим ряд

$$0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 9,\ 26,\ 75,\ 216,\ 622,\ 1791,\ 5157 \text{ и т. д.};$$

следовательно, наименьший корень уравнения приближенно будет

$$y = \frac{1791}{5157} = \frac{199}{573} = 0{,}347\,2949,$$

откуда

$$x = \frac{1}{2}y = 0{,}173\,6475;$$

значение это почти в три раза ближе предыдущего[1]).

ПРИМЕР 3

Если требуется найти наибольший корень того же уравнения

$$0 = 1 - 6x * + 8x^3,$$

то положим $x = \frac{y}{2}$; тогда

$$y^3 * - 3y + 1 = 0.$$

Наибольший корень этого уравнения найдется из рекуррентного ряда, шкала отношения которого есть $0,\ 3,\ -1$, откуда, взяв начальные три члена произвольно, получаем

$$1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 5,\ 4,\ 13,\ 7,\ 35,\ 8,\ 98,\ -11 \text{ и т. д.}$$

Так как в этом ряде мы пришли к отрицательным членам, то это указывает, что наибольший корень будет отрицателен, именно,

$$x = -\sin 70° = -0{,}9396926.$$

Поэтому и в начальных членах надо считаться с этим, что можно сделать так:

$$1,\ -2,\ +4,\ -7,\ +14,\ -25,\ +49,\ -89,\ +179,\ -316,\ +605 \text{ и т. д.},$$

откуда

$$y = \frac{-605}{316} \quad \text{и} \quad x = \frac{-605}{632} = -0{,}957,$$

что сильно уклоняется от истины.

339. Причина этого отклонения заключается главным образом в том, что корнями данного уравнения являются

$$\sin 10°, \quad \sin 50° \quad \text{и} \quad -\sin 70°;$$

оба бóльших корня отличаются друг от друга так мало, что в степенях, до которых мы продолжили ряд, второй корень $\sin 50°$ будет сохранять значительное отношение к наибольшему корню, и поэтому не исчезнет по сравнению с ним. Скачок зависит также и от того, что найденные значения становятся попеременно то слишком большими, то

---

[1]) И в эти числовые результаты у Эйлера вкралась небольшая ошибка; они исправлены по Opera omnia.

слишком малыми. Так, если взять

$$y=\frac{-316}{172},$$

то

$$x=\frac{-158}{172}=\frac{-79}{86}=-0{,}919.$$

Так как степени наибольшего корня становятся попеременно положительными и отрицательными, а степени второго корня также попеременно прибавляются и уничтожаются, то, чтобы эта разница стала нечувствительной, надо продолжить ряд гораздо дальше.

340. Другим средством избавиться от этого неудобства может послужить преобразование уравнения при помощи удобной подстановки в другой вид, при котором корни не будут уже столь близкими друг к другу. Так, если в уравнении

$$0=1-6x+8x^3,$$

корнями которого служат $-\sin 70°$, $+\sin 50°$, $+\sin 10°$, положить $x=y-1$, то корнями получающегося уравнения

$$0=8y^3-24y^2+18y-1$$

будут $1-\sin 70°$, $1+\sin 50°$, $1+\sin 10°$; его наименьший корень будет $1-\sin 70°$, между тем как $\sin 70°$ был наибольшим корнем предыдущего уравнения; далее, $1+\sin 50°$ теперь является наибольшим корнем, тогда как раньше $\sin 50°$ был средним. Этим путем любой корень посредством подстановки может быть преобразован в наибольший или наименьший корень нового уравнения и, следовательно, может быть найден при помощи изложенного здесь метода. Так как, кроме того, корень $1-\sin 70°$ в этом примере гораздо меньше двух остальных, он также легко найдется приближенно посредством рекуррентного ряда.

ПРИМЕР 4

Найти наименьший корень уравнения

$$0=8y^3-24y^2+18y-1,$$

который при вычитании из единицы дает синус угла 70°.

Положим $y=\frac{1}{2}z$, тогда

$$0=z^3-6z^2+9z-1;$$

наименьший корень этого уравнения будет найден из рекуррентного ряда, шкала отношения которого есть 9, -6, $+1$; для нахождения же наибольшего корня в качестве шкалы отношения надо взять 6, -9, $+1$. Значит, для наименьшего получается ряд

$$1,\ 1,\ 1,\ 4,\ 31,\ 256,\ 2122,\ 17\,593,\ 145\,861 \text{ и т. д.};$$

итак, приближенно

$$z=\frac{17\,593}{145\,861}=0{,}120\,614\,83$$

и

$$y=0{,}060\,307\,41,$$

откуда

$$\sin 70^\circ = 1 - y = 0{,}939\,692\,58,$$

что не отличается от истины даже в последнем знаке. Из этого примера видно, какую пользу приносит удобное преобразование уравнения путем подстановки при нахождении корней, а также, что при пользовании подобными преобразованиями изложенный метод оказывается пригодным не только для нахождения наибольших и наименьших корней, но может дать также все корни.

341. Когда какой-либо корень данного уравнения заранее приближенно известен, т. е., скажем, если число k весьма мало отличается от какого-либо корня, то полагаем $x-k=y$ или $x=y+k$; этим путем получится уравнение, наименьший корень которого будет равен $x-k$; он определится посредством рекуррентного ряда и притом без всякого труда, так как корень этот гораздо меньше прочих; если к нему прибавить k, то получится истинный корень x данного уравнения. Этот прием может применяться столь широко, что если даже уравнение содержит мнимые корни, он сохраняет свое значение.

342. Особенно же необходим этот прием нахождения корня в том случае, когда имеется равный ему, но с обратным знаком. Другими словами, если уравнение, наибольший корень которого есть p, будет иметь корень $-p$, то хотя бы мы продолжили рекуррентный ряд до бесконечности, однако этот корень p никогда не будет получен. Для пояснения этого на примере возьмем уравнение

$$x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0,$$

наибольший корень которого есть $\sqrt{5}$, но кроме него имеется также $-\sqrt{5}$. Если для нахождения наибольшего корня мы применим указанный выше способ и образуем рекуррентный ряд по шкале отношения $1, +5, -5$, именно,

$$1,\ 2,\ 3,\ 8,\ 13,\ 38,\ 63,\ 188,\ 313,\ 938,\ 1563 \text{ и т. д.},$$

то мы не придем ни к какому постоянному отношению. Члены через один дают одно и то же отношение; если любой из них разделить на предыдущий, то получится квадрат наибольшего корня; так, приближенно будет

$$5 = \frac{1563}{313} = \frac{938}{188} = \frac{313}{63}.$$

Во всех тех случаях, когда члены только через один образуют постоянное отношение, получается приближенно квадрат искомого корня. Сам же корень $x=\sqrt{5}$ будет найден, если положить $x=y+2$, откуда получится уравнение

$$1 - 3y - 5y^2 - y^3 = 0;$$

наименьший его корень будет найден из ряда

$$1,\ 1,\ 1,\ 9,\ 33,\ 145,\ 609,\ 2\,585,\ 10\,945 \text{ и т. д.}$$

и приближенно будет равен

$$\frac{2\,585}{10\,945} = 0{,}2361.$$

а 2,2361 приближенно равно $\sqrt{5}$, что представляет наибольший корень уравнения.

343. Хотя числитель дроби, из которой получается рекуррентный ряд, зависит от нашего усмотрения, однако удобное его составление по большей части способствует быстрому нахождению приближенной величины корня. Если принять относительно множителей знаменателя сделанное выше предположение (§ 334), то общий член рекуррентного ряда равен

$$z^n(\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n+ \text{ и т. д.});$$

коэффициенты $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д. определяются при помощи числителя дроби; здесь может случиться, что $\mathfrak{A}$ получит либо большое, либо малое значение; в первом случае наибольший корень p находится быстро, в последнем же — медленно. Но можно принять числитель даже таким, чтобы $\mathfrak{A}$ вовсе исчезло; в этом случае ряд, при продолжении даже до бесконечности, никогда не даст наибольшего корня p. Это бывает, когда числитель выбирается так, что сам он имеет тот же множитель $1-pz$, и, таким образом, этот множитель вовсе выпадает из расчета. Так, если дано уравнение

$$x^3-6x^2+10x-3=0,$$

наибольший корень которого равен 3, и отсюда составить дробь

$$\frac{1-3z}{1-6z+10z^2-3z^3},$$

так что шкала отношения рекуррентного ряда будет 6, -10, $+3$, то получим ряд

$$1,\ 3,\ 8,\ 21,\ 55,\ 144,\ 377 \text{ и т. д.};$$

члены этого ряда вовсе не приближаются к отношению $1:3$. Этот самый ряд получается из дроби

$$\frac{1}{1-3z+z^2}$$

и поэтому дает наибольший корень уравнения

$$x^2-3x+1=0.$$

344. Числитель можно выбрать даже так, что посредством рекуррентного ряда можно будет найти любой корень уравнения; это бывает, когда числитель представляет произведение всех множителей знаменателя, за исключением того, которому соответствует желаемый корень. Так, если в предыдущем примере взять числителем $1-3z+z^2$, то дробь

$$\frac{1-3z+z^2}{1-6z+10z^2-3z^3}$$

даст рекуррентный ряд

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243 \text{ и т. д.},$$

который, будучи геометрическим, тотчас указывает корень $x=3$. Дробь же эта равна простой

$$\frac{1}{1-3z}.$$

Отсюда видно, что если начальные члены, которые можно задать произвольно, выбрать так, чтобы они составили геометрическую прогрессию, показатель которой будет равен одному корню уравнения, то тогда весь рекуррентный ряд будет геометрическим, и поэтому он даст этот самый корень, даже если тот не будет ни наибольшим, ни наименьшим.

345. Для того чтобы при отыскании при помощи рекуррентного ряда наибольшего или наименьшего корня у нас не получился, сверх ожидания, какой-либо другой корень, следует выбрать такой числитель, который не имел бы со знаменателем никакого общего множителя; это будет, когда мы в качестве числителя возьмем единицу, откуда первый член ряда будет равен единице, а по нему посредством шкалы отношения определятся все следующие. Этим способом, действительно, всегда будет получен или наибольший, или наименьший корень уравнения, смотря по заданию.

Так, если дано уравнение

$$y^3 * - 3y + 1 = 0$$

и надо найти наибольший его корень, то по шкале отношения 0, $+3$, -1, начиная с единицы, получается следующий рекуррентный ряд:

$$1,\ -0,\ +3,\ -1,\ +9,\ -6,\ +28,\ -27,\ +90,\ -109,\ +297,$$
$$-417,\ +1000,\ -1548,\ +3417,\ -5644 \text{ и т. д.};$$

он сходится к постоянному отношению и показывает, что наибольший корень отрицателен, причем приближенно

$$y = \frac{-5644}{3417} = -1{,}651741;$$

но он должен быть равен $-1{,}8793852$. Выше приведено соображение, почему приближение к истине происходит так медленно; именно потому, что другой корень немногим меньше наибольшего и вместе с тем положителен.

346. Если взвесить тщательно то, что мы сказали, как вообще, так и применительно к указанным примерам, то можно вполне убедиться в весьма большой пользе этого метода при нахождении корней уравнений. Искусственные же приемы, при помощи которых я сократил процесс и которые могут его ускорить, также показаны в достаточной мере; так что сверх этого прибавить нечего; остается только разобрать случаи, когда уравнение содержит равные или мнимые корни. Положим, что знаменатель дроби

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ и т. д.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ и т. д.}}$$

имеет множитель $(1 - pz)^2$, тогда как остальные суть $1 - qz$, $1 - rz$ и т. д. Общий член получающегося отсюда рекуррентного ряда будет

$$z^n\,[(n+1)\,\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}p^n + \mathfrak{C}q^n + \text{ и т. д.}].$$

Чтобы определить, какое значение примет этот ряд при чрезвычайно большом n, надо различать два случая: один — когда p больше остальных чисел q, r и т. д., другой — когда p не дает наибольшего корня. В первом случае, когда p является одновременно наибольшим корнем, остальные члены $\mathfrak{B}p^n$, $\mathfrak{C}q^n$ и т. д., вследствие наличия коэффициента $n+1$, не могут исчезнуть по сравнению с ним так быстро, как раньше; если же $q > p$, то также не скоро исчезнет член $(n+1)\,\mathfrak{A}p^n$ по сравнению с $\mathfrak{C}q^n$ [68], и тогда определение наибольшего корня становится очень утомительным.

ПРИМЕР 1

Дано уравнение

$$x^3-3x^2+4=0,$$

у которого наибольший корень 2 встречается дважды.

Итак, будем искать изложенным выше способом наибольший корень путем развертывания дроби

$$\frac{1}{1-3z*+4z^3};$$

она даст следующий рекуррентный ряд:

1, 3, 9, 23, 57, 135, 313, 711, 1593 и т. д.,

где каждый член при делении на предыдущий дает частное большее, чем 2. Причину этого весьма легко видеть из общего члена; именно, если отбросить в нем члены $\mathfrak{C}q^n$ и т. д., то член, соответствующий степени z^n, будет равен

$$(n+1)\,\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}p^n,$$

а следующий равен

$$(n+2)\,\mathfrak{A}p^{n+1}+\mathfrak{B}p^{n+1}.$$

Последний при делении на предыдущий дает

$$\frac{(n+2)\,\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{(n+1)\,\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}\,p>p,$$

если только n не возросло до бесконечности.

ПРИМЕР 2

Дано уравнение

$$x^3-x^2-5x-3=0,$$

наибольший корень которого равен 3, остальные два одинаковы и равны -1; требуется найти наибольший корень посредством рекуррентного ряда со шкалой отношения 1, $+5$, $+3$; получаем

1, 1, 6, 14, 47, 135, 412, 1228 и т. д.;

этот ряд быстро дает значение 3, потому что степени меньшего корня -1 даже при умножении на $n+1$ довольно быстро исчезают по сравнению со степенями тройки.

ПРИМЕР 3

Если же дано уравнение

$$x^3+x^2-8x-12=0,$$

корнями которого являются 3, -2, -2, то наибольший из них обнаружится гораздо позднее. Именно, получится ряд

1, -1, 9, -5, 65, 3, 457, 347, 3345, 4915 и т. д.,

который придется продолжить весьма далеко, прежде чем станет ясно, что корень, который должен из него получиться, равен 3.

347. Подобным образом, когда равны три корня, так что один множитель знаменателя будет $(1-pz)^3$, а остальные $1-qz$, $1-rz$ и т. д., то общий член рекуррентного ряда будет равен

$$z^n \left[\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2} \mathfrak{A} p^n + (n+1) \mathfrak{B} p^n + \mathfrak{C} p^n + \mathfrak{D} q^n + \mathfrak{E} r^n + \text{ и т. д.} \right].$$

Если p будет наибольшим корнем, а n — числом, настолько большим, что степени q^n, r^n и т. д. исчезнут по сравнению с p^n, то тогда из рекуррентного ряда получится корень, равный

$$\frac{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)\mathfrak{A} + (n+2)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\mathfrak{A} + (n+1)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}} p,$$

который не укажет истинного значения p, если только n не будет весьма большим и как бы бесконечным. Это значение корня будет равно

$$p + \frac{(n+2)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\mathfrak{A} + (n+1)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}} p.$$

Если же p не будет наибольшим корнем, то нахождение наибольшего корня будет еще несравненно более затруднительным; отсюда следует, что уравнения, содержащие равные корни, гораздо труднее решаются посредством этого метода рекуррентных рядов, чем в случае, когда все корни между собою не равны.

348. Посмотрим теперь, как должен быть составлен рекуррентный ряд, продолжаемый до бесконечности, когда знаменатель дроби имеет мнимые множители. Пусть у знаменателя дроби

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{и т. д.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ и т. д.}}$$

действительные множители будут

$$1 - qz, \quad 1 - rz \text{ и т. д.},$$

и, сверх того, еще есть трехчленный множитель

$$1 - 2pz \cos\varphi + p^2 z^2,$$

содержащий два простых мнимых множителя. Если рекуррентный ряд, получаемый из этой дроби, будет

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + \text{и т. д.},$$

то на основании изложенного выше [§ 218] коэффициент P равен

$$\frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi + \mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi} p^n + \mathfrak{C} q^n + \mathfrak{D} r^n + \text{ и т. д.}$$

Если число p будет меньше одного из прочих q, r и т. д., так что наибольший корень уравнения

$$x^m + \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \text{и т. д.} = 0$$

будет действительным, то он посредством рекуррентных рядов найдется так же, как если бы вовсе не входили никакие мнимые корни.

349. Итак, нахождение наибольшего действительного корня не будет затруднено наличием мнимых корней, если последние будут таковы, что произведение двух из них, составляющих действительный множитель, не будет больше квадрата наибольшего корня. Если же будут входить два мнимых корня такие, что их произведение будет равно или больше квадрата наибольшего действительного корня, то изложенный выше метод исследования ничего не даст, потому что степень p^n по сравнению с подобной степенью наибольшего корня никогда не исчезнет, даже если бы ряд продолжить до бесконечности. Здесь уместно привести примеры для иллюстрации этого.

ПРИМЕР 1

Дано уравнение

$$x^3-2x-4=0;$$

надо определить наибольший его корень.

Уравнение это разлагается на два множителя

$$(x-2)(x^2+2x+2);$$

отсюда один корень будет 2, а два других будут мнимыми; произведение их есть 2; оно меньше квадрата действительного корня. Поэтому последний может быть найден по указанному способу. Составим рекуррентный ряд по шкале отношения 0, $+2$, $+4$; получим

1, 0, 2, 4, 4, 16, 24, 48, 112, 192, 416, 832 и т. д.,

откуда вполне удобно можно узнать действительный корень 2.

ПРИМЕР 2

Дано уравнение

$$x^3-4x^2+8x-8=0,$$

один действительный корень которого есть 2, произведение же двух мнимых равно 4, т. е. равно квадрату действительного корня 2.

Станем искать корень при помощи рекуррентного ряда; для упрощения положим $x=2y$, так что получится

$$y^3-2y^2+2y-1=0;$$

отсюда получается рекуррентный ряд

1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1 и т. д.;

так как в нем постоянно повторяются те же члены, то отсюда можно лишь заключить, что наибольший корень не будет действительным, или же имеются мнимые корни, произведение которых равно квадрату действительного корня или превосходит его.

ПРИМЕР 3

Дано уравнение

$$x^3-3x^2+4x-2=0,$$

действительный корень которого есть 1, произведение же мнимых равно 2. Составим по шкале отношения 3, -4, $+2$ ряд

1, 3, 5, 5, 1, -7, -15, -15, $+1$, 33, 65, 65, 1 и т. д.;

так как в нем члены то положительны, то отрицательны, то отсюда никоим образом нельзя узнать действительного корня 1. Перемены такого рода всегда указывают на то, что корень, который должен получиться из ряда, будет мнимый; в самом деле, здесь степени мнимых корней больше степеней действительного корня.

350. Пусть в общей дроби произведение двух мнимых корней p^2 будет больше квадрата какого-либо действительного корня, так что по сравнению с p^n остальные степени q^n, r^n и т. д. исчезнут, когда число n станет бесконечным. В этом случае будет

$$P=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi}{\sin\varphi}p^n$$

и

$$Q=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+2)\varphi+\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}p^{n+1},$$

следовательно,

$$\frac{Q}{P}=\frac{\mathfrak{A}\sin(n+2)\varphi+\mathfrak{B}\sin(n+1)\varphi}{\mathfrak{A}\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{B}\sin n\varphi}p.$$

Выражение это никогда не даст постоянного значения, даже если n будет бесконечным числом. В самом деле, синусы углов всегда остаются весьма изменчивыми, причем бывают то положительными, то отрицательными.

351. Однако, если подобным же образом взять следующие дроби $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{R}$ и из них исключить буквы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, то вместе с тем выпадет из расчета и число n; так, получится [69]

$$Pp^2+R=2Qp\cos\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi=\frac{Pp^2+R}{2Qp};$$

точно так же получим

$$\cos\varphi=\frac{Qp^2+S}{2Rp};$$

из сравнения этих двух значений найдем

$$p=\sqrt{\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}},$$

а также

$$\cos\varphi=\frac{QR-PS}{2\sqrt{(Q^2-PR)(R^2-QS)}}.$$

Поэтому, если рекуррентный ряд продолжить до тех пор, пока по сравнению с p^n не исчезнут степени остальных корней, то этим путем может быть найден трехчленный множитель $1-2pz\cos\varphi+p^2z^2$.

352. Так как это вычисление может представить трудность недостаточно опытным лицам, то я его здесь приведу полностью.

Из найденного значения $\frac{Q}{P}$ получается

$$\mathfrak{A}Pp\sin(n+2)\varphi+\mathfrak{B}Pp\sin(n+1)\varphi=\mathfrak{A}Q\sin(n+1)\varphi+\mathfrak{B}Q\sin n\varphi,$$

откуда

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}=\frac{Q\sin n\varphi-Pp\sin(n+1)\varphi}{Pp\sin(n+2)\varphi-Q\sin(n+1)\varphi}.$$

На таком же основании

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}=\frac{R\sin(n+1)\varphi-Qp\sin(n+2)\varphi}{Qp\sin(n+3)\varphi-R\sin(n+2)\varphi};$$

приравняв эти два значения, получим

$$\begin{aligned}0&=Q^2p\sin n\varphi\sin(n+3)\varphi-QR\sin n\varphi\sin(n+2)\varphi-\\&-PQp^2\sin(n+1)\varphi\sin(n+3)\varphi-Q^2p\sin(n+1)\varphi\sin(n+2)\varphi+\\&+QR\sin(n+1)\varphi\sin(n+1)\varphi+PQp^2\sin(n+2)\varphi\sin(n+2)\varphi\end{aligned}$$

[70]. Но так как

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\cos(a-b)-\frac{1}{2}\cos(a+b),$$

то будем иметь

$$0=\frac{1}{2}Q^2p(\cos 3\varphi-\cos\varphi)+\frac{1}{2}QR(1-\cos 2\varphi)+\frac{1}{2}PQp^2(1-\cos 2\varphi);$$

после деления на $\frac{1}{2}Q$ получим

$$(Pp^2+R)(1-\cos 2\varphi)=Qp(\cos\varphi-\cos 3\varphi).$$

Но

$$\cos\varphi=\cos 2\varphi\cos\varphi+\sin 2\varphi\sin\varphi$$

и

$$\cos 3\varphi=\cos 2\varphi\cos\varphi-\sin 2\varphi\sin\varphi,$$

откуда

$$\cos\varphi-\cos 3\varphi=2\sin 2\varphi\sin\varphi=4(\sin\varphi)^2\cos\varphi;$$

далее,

$$1-\cos 2\varphi=2(\sin\varphi)^2,$$

поэтому

$$Pp^2+R=2Qp\cos\varphi$$

и

$$\cos\varphi=\frac{Pp^2+R}{2Qp},$$

а также

$$\cos\varphi=\frac{Qp^2+S}{2Rp},$$

откуда получаются вышеуказанные значения, именно,

$$p=\sqrt{\frac{R^2-QS}{Q^2-PR}}\quad\text{и}\quad\cos\varphi=\frac{QR-PS}{2\sqrt{(Q^2-PR)(R^2-QS)}}.$$

353. Если знаменатель дроби, из которой образуется рекуррентный ряд, имеет несколько не равных между собою трехчленных множителей, то при взгляде на указанную выше форму общего члена [§ 219 и след.] станет ясно, что нахождение корней будет гораздо более неточным. Между тем, если найден приближенно какой-либо один действительный корень, то его значение получится гораздо точнее путем преобразования уравнения. Действительно, положим x равным этому найденному значению плюс y и станем искать в новом уравнении наименьший корень для y; последний при сложении с первым значением даст истинное значение x.

ПРИМЕР 4

Дано уравнение

$$x^3-3x^2+5x-4=0,$$

один корень которого приблизительно равен единице, как видно из того, что при $x=1$ получается

$$x^3-3x^2+5x-4=-1.$$

Положим $x=1+y$, тогда

$$1-2y-y^3=0,$$

откуда для нахождения наименьшего корня получится следующий рекуррентный ряд со шкалой отношения 2, 0, $+1$:

$$1,\ 2,\ 4,\ 9,\ 20,\ 44,\ 97,\ 214,\ 472,\ 1041,\ 2296 \text{ и т. д.};$$

отсюда наименьший корень y приближенно равен

$$\frac{1041}{2296}=0{,}453\ 397,$$

так что

$$x=1{,}453\ 397.$$

Столь близкое значение едва ли может быть получено так легко другим способом.

354. Если какой-либо рекуррентный ряд подходит, в конце концов, очень близко к геометрической прогрессии, то из закона последовательности тотчас же можно без труда узнать, корнем какого уравнения будет частное от деления какого-либо члена на предыдущий. Пусть

$$P,\ Q,\ R,\ S,\ T \text{ и т. д.}$$

будут члены рекуррентного ряда, весьма удаленные от начала, так что они уже сливаются с геометрической прогрессией; пусть при этом

$$T=\alpha S+\beta R+\gamma Q+\delta P,$$

т. е. шкала отношения будет α, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$. Положим значение дроби $\frac{Q}{P}=x$; тогда

$$\frac{R}{P}=x^2,\quad \frac{S}{P}=x^3 \quad \text{и} \quad \frac{T}{P}=x^4;$$

при подстановке в предыдущее равенство они дадут

$$x^4 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta;$$

отсюда ясно, что частное $\frac{Q}{P}$ даст, наконец, один корень найденного уравнения. На это указывает и предыдущий метод; кроме того, он говорит, что дробь $\frac{Q}{P}$ даст наибольший корень уравнения.

355. Этот метод нахождения корней уравнений часто может также принести пользу, когда уравнение будет бесконечным. Чтобы показать это, допустим, что дано уравнение

$$\frac{1}{2} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \text{ и т. д.,}$$

наименьший корень z которого выражает дугу $30°$, или шестую часть полуокружности. Приведем уравнение к виду

$$1 - 2z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{60} + \frac{z^7}{2520} - \text{ и т. д.} = 0;$$

отсюда получается рекуррентный ряд, у которого шкала отношения бесконечна, именно,

$$2,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ +\frac{1}{60},\ 0,\ -\frac{1}{2520},\ 0 \text{ и т. д.};$$

рекуррентный же ряд будет

$$1,\ 2,\ 4,\ \frac{23}{3},\ \frac{1681}{60},\ \frac{2408}{45} \text{ и т. д.};$$

значит, приближенно

$$z = \frac{1681 \cdot 45}{2408 \cdot 60} = \frac{1681 \cdot 3}{2408 \cdot 4} = \frac{5043}{9632} = 0{,}52356.$$

Но из известного отношения окружности к диаметру имеем $z = 0{,}523\ 598$; таким образом, найденный корень уклоняется от истины на $\frac{3}{100\,000}$ [1]. Однако это удобно применяется в данном уравнении, потому что все корни действительны и притом прочие корни отличаются достаточно значительно от наименьшего. Но так как это условие весьма редко имеет место в бесконечных уравнениях, то изложенный метод находит незначительное применение при их решении.

---

[1]) Более точными значениями являются соответственно $z = 0{,}523\ 567$ и $z = 0{,}523\ 599$, но их разность тоже составляет $\frac{3}{100\,000}$. [*Ф. Р.*]

ГЛАВА XVIII

О НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЯХ [71]

356. Так как в предыдущих главах я разобрал многое как относительно бесконечных рядов, так и относительно произведений, полученных из бесконечного числа сомножителей, то я решил, что будет нелишним прибавить кое-что о некотором третьем роде бесконечных выражений, представляемом непрерывными дробями или делениями. Хотя этот род выражений до настоящего времени разработан мало, однако мы не сомневаемся, что когда-нибудь применение его весьма широко распространится в анализе бесконечных. Я приводил уже несколько раз примеры подобного рода, в силу которых это ожидание становится весьма вероятным. Но исследование, которое я решил вкратце наметить и изложить в настоящей главе, особенно неоценимую пользу приносит в арифметике и общей алгебре.

357. Непрерывной дробью я называю такую дробь, знаменатель которой состоит из целого числа с дробью, у которой знаменатель опять представляет совокупность целого и дроби, которая далее составлена таким же образом, причем это может либо продолжаться до бесконечности, либо где-нибудь приостановиться. Такого рода дробью будет выражение

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\text{ и т. д.}}}}}}$$

или

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\text{ и т. д.:}}}}}}$$

в первом из них числители всех дробей суть единицы — этот вид я главным образом и буду здесь рассматривать, в другом же числителями служат какие угодно числа.

358. Теперь, описав вид непрерывных дробей, прежде всего надо посмотреть, каким образом можно найти их значение, выраженное обычным образом. Для того чтобы легче это было сделать, будем

действовать последовательно, обрывая непрерывные дроби сперва на первой, потом на второй, затем на третьей и т. д. дроби; тогда станет ясно, что

$$a = a,$$

$$a+\frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b},$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{abc+a+c}{bc+1},$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}} = \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d},$$

и т. д.

359. Хотя в этих простых дробях не так легко подметить закон, по которому числитель и знаменатель составляются из букв a, b, c, d и т. д., однако внимательному читателю тотчас станет ясно, каким образом любая дробь может быть образована из предыдущих; именно любой числитель представляет совокупность из последнего числителя, помноженного на новую букву, и предпоследнего числителя, взятого непосредственно, и тот же закон наблюдается в знаменателях. Итак, если написать по порядку буквы a, b, c, d и т. д., то из них легко составить найденные дроби следующим образом:

$$\begin{array}{cccccc} & a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+1}{b}, & \frac{abc+a+c}{bc+1}, & \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d} & \text{и т. д.;} \end{array}$$

здесь любой числитель получается путем умножения последнего из предыдущих на стоящий сверху указатель и прибавления к произведению предпоследнего числителя; этот же закон сохраняет силу для знаменателей. Чтобы можно было пользоваться этим законом с самого начала, я поставил впереди дробь $\frac{1}{0}$; хотя эта дробь и не получается из непрерывной дроби, однако делает более ясным закон последовательности. При этом любая дробь выражает значение непрерывной дроби, продолженной вплоть до буквы, которая следует за предыдущей, включительно.

360. Подобным образом другая форма непрерывных дробей

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\text{ и т. д.,}}}}}}$$

смотря по тому, на каком месте мы их обрываем, даст:

$$a = a,$$

$$a+\frac{\alpha}{b} = \frac{ab+\alpha}{b},$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}} = \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta},$$

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}} = \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b},$$

и т. д.;

каждую из этих дробей можно найти по двум предыдущим таким образом:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}, & \frac{a}{1}, & \frac{ab+\alpha}{b}, & \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta}, & \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array} \text{ и т. д.}$$

361. Именно, для составления дробей напишем сверху указатели a, b, c, d и т. д., а внизу указатели α, β, γ, δ и т. д. Первой дробью опять поставим $\frac{1}{0}$, второй $\frac{a}{1}$; тогда любая из следующих получится путем умножения числителя последней на стоящий сверху указатель, числителя же предпоследней — на написанный внизу указатель; если сложить оба произведения, то их сумма будет числителем следующей дроби; подобным образом ее знаменатель будет составлен из последнего знаменателя, умноженного на вышестоящий, и из предпоследнего знаменателя, умноженного на нижестоящий указатель. Найденная этим путем любая дробь выразит значение непрерывной дроби, продолженной вплоть до знаменателя, написанного над предыдущей дробью, включительно.

362. Если продолжать эти дроби до тех пор, пока непрерывная дробь не даст всех указателей, то последняя даст точное значение непрерывной дроби. Предшествующие же дроби все ближе подходят к этому значению и поэтому дают весьма удобное приближение. Положим истинное значение непрерывной дроби

$$a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\text{ и. т. д.}}}}}$$

равным x; при этом ясно, что первая дробь $\frac{1}{0}$ больше, чем x; вторая же $\frac{a}{1}$ меньше, чем x; третья $a+\frac{\alpha}{b}$ опять по величине будет больше; четвертая снова меньше и т. д., эти дроби будут попеременно то больше, то меньше x. Далее ясно, что любая дробь подходит ближе к истинному значению x, чем какая-либо из предыдущих [72]; поэтому, таким образом, весьма быстро и удобно получается приближенное значение x, даже если непрерывная дробь продолжается до бесконечности, лишь бы только числители α, β, γ, δ и т. д. не слишком возрастали, если же все числители будут равны единице, то тогда приближение не сопряжено ни с какими неудобствами.

363. Чтобы сущность этого приближения к истинному значению непрерывной дроби была лучше видна, рассмотрим разности найденных дробей. Пропустив первую $\frac{1}{0}$, получим, что разность между второй и третьей равна

$$\frac{\alpha}{b};$$

четвертая при вычитании из третьей дает в остатке

$$\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)};$$

четвертая при вычитании из пятой даст в остатке

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$$

и т. д. Отсюда значение непрерывной дроби выразится посредством обычного ряда членов таким образом:

$$x=a+\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-\text{и т. д.}$$

Ряд этот обрывается во всех тех случаях, когда непрерывная дробь не продолжается до бесконечности.

364. Итак, мы нашли способ развертывания любой непрерывной дроби в ряд членов, знаки которых перемножаются, если первая буква a исчезает. Так, если

$$x=\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f+\text{ и т. д.},}}}}}$$

то по только что найденному будем иметь

$$x=\frac{\alpha}{b}-\frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}+\frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}-$$
$$-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)}+\text{ и т. д.}$$

Поэтому, если α, β, γ, δ и т. д. будут не возрастающими числами, например все будут единицы, знаменатели же a, b, c, d и т. д. будут какими угодно положительными целыми числами, то величина непрерывной дроби выразится при помощи весьма быстро сходящегося ряда.

365. При внимательном рассмотрении вышесказанного можно, обратно, любой ряд с перемежающимися членами обратить в непрерывную дробь, т. е. найти непрерывную дробь, величина которой была бы равна сумме членов данного ряда. Пусть задан ряд

$$x=A-B+C-D+E-F+\text{ и т. д.};$$

тогда при сравнении отдельных членов с рядом, полученным из непрерывной дроби, найдем

$$A=\frac{\alpha}{b}, \qquad \text{откуда } \alpha=Ab,$$

$$\frac{B}{A}=\frac{\beta}{bc+\beta}, \qquad \beta=\frac{Bbc}{A-B},$$

$$\frac{C}{B}=\frac{\gamma\delta}{bcd+\beta d+\gamma b}, \qquad \gamma=\frac{Cd(bc+\beta)}{b(B-C)},$$

$$\frac{D}{C}=\frac{\delta(bc+\beta)}{bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta} \qquad \delta=\frac{De(bcd+\beta d+\gamma b)}{(bc+\beta)(C-D)}$$

и т. д. и т. д.

Но так как

$$\beta=\frac{Bbc}{A-B},$$

то

$$bc+\beta=\frac{Abc}{A-B};$$

отсюда

$$\gamma=\frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}.$$

Далее

$$bcd+\beta d+\gamma b=(bc+\beta)d+\gamma b=\frac{Abcd}{A-B}+\frac{ACbcd}{(A-B)(B-C)}=\frac{ABbcd}{(A-B)(B-C)};$$

откуда

$$\frac{bcd+\beta d+\gamma b}{bc+\beta}=\frac{Bd}{B-C}$$

и

$$\delta=\frac{BDde}{(B-C)(C-D)}.$$

Подобным образом найдем

$$\varepsilon=\frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$$

и т. д.

366. Для лучшего уяснения этого закона положим

$$\begin{aligned}
&P=b,\\
&Q=bc+\beta,\\
&R=bcd+\beta d+\gamma b,\\
&S=bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta,\\
&T=bcdef+\text{ и т. д.},\\
&V=bcdefg+\text{ и т. д.}\\
&\qquad\qquad\text{и т. д.};
\end{aligned}$$

тогда, по закону образования этих выражений, будем иметь

$$\begin{aligned}
Q&=Pc+\beta,\\
R&=Qd+\gamma P,\\
S&=Re+\delta Q,\\
T&=Sf+\varepsilon R,\\
V&=Tg+\zeta S\\
&\text{и т. д.}
\end{aligned}$$

Итак, при этих обозначениях получаем

$$x=\frac{\alpha}{P}-\frac{\alpha\beta}{PQ}+\frac{\alpha\beta\gamma}{QR}-\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{RS}+\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{ST}-\text{ и т. д.}$$

367. Так как мы положили

$$x=A-B+C-D+E-F+\text{ и т. д.},$$

то будем иметь

$$\begin{aligned}
A&=\frac{\alpha}{P}, & \alpha&=AP,\\
\frac{B}{A}&=\frac{\beta}{Q}, & \beta&=\frac{BQ}{A},\\
\frac{C}{B}&=\frac{\gamma P}{R}, & \gamma&=\frac{CR}{BP},\\
\frac{D}{C}&=\frac{\delta Q}{S}, & \delta&=\frac{DS}{CQ},\\
\frac{E}{D}&=\frac{\varepsilon R}{T}, & \varepsilon&=\frac{ET}{DR}
\end{aligned}$$

и т. д.

Беря, далее, разности, получим

$$\begin{aligned}
A-B&=\frac{\alpha(Q-\beta)}{PQ}=\frac{\alpha c}{Q}=\frac{APc}{Q},\\
B-C&=\frac{\alpha\beta(R-\gamma P)}{PQR}=\frac{\alpha\beta d}{PR}=\frac{BQd}{R},\\
C-D&=\frac{\alpha\beta\gamma(S-\delta Q)}{QRS}=\frac{\alpha\beta\gamma e}{QS}=\frac{CRe}{S},\\
D-E&=\frac{\alpha\beta\gamma\delta(T-\varepsilon R)}{RST}=\frac{\alpha\beta\gamma\delta f}{RT}=\frac{DSf}{T}
\end{aligned}$$

и т. д.

Перемножая эти выражения между собою попарно, получим

$$\begin{aligned}
(A-B)(B-C)&=ABcd\,\frac{P}{R} \quad \text{и} \quad \frac{R}{T}=\frac{ABcd}{(A-B)(B-C)},\\
(B-C)(C-D)&=BCde\,\frac{Q}{S} \quad \text{и} \quad \frac{S}{Q}=\frac{BCde}{(B-C)(C-D)},\\
(C-D)(D-E)&=CDef\,\frac{R}{T} \quad \text{и} \quad \frac{T}{R}=\frac{CDef}{(C-D)(D-E)}
\end{aligned}$$

и т. д.

Отсюда, так как $P=b$, $Q=\frac{\alpha c}{A-B}=\frac{Abc}{A-B}$, будем иметь

$$\begin{aligned}
\alpha&=AB,\\
\beta&=\frac{Bbc}{A-B},\\
\gamma&=\frac{ACcd}{(A-B)(B-C)},\\
\delta&=\frac{BDde}{(B-C)(C-D)},\\
\varepsilon&=\frac{CEef}{(C-D)(D-E)}
\end{aligned}$$

и т. д.

368. Когда найдены значения числителей α, β, γ, δ и т. д., то знаменатели b, c, d, e и т. д. представляются нашему усмотрению; поэтому их следует выбрать так, чтобы и они сами были целыми числами

и давали целые значения для α, β, γ, δ и т. д. Это зависит также от природы чисел A, B, C, D и т. д., будут ли они числами целыми или дробными. Пусть они будут целыми числами; поставленному условию можно удовлётворить, полагая

$$\begin{array}{ll} b=1, & \text{откуда } \alpha=A, \\ c=A-B, & \beta=B, \\ d=B-C, & \gamma=AC, \\ e=C-D, & \delta=BD, \\ f=D-E, & \varepsilon=CE \\ \text{и т. д.,} & \text{и т. д.} \end{array}$$

Поэтому, если

$$x=A-B+C-D+E-F+\text{ и т. д.},$$

то это же значение x может быть выражено непрерывной дробью так:

$$x=\cfrac{A}{1+\cfrac{B}{A-B+\cfrac{AC}{B-C+\cfrac{BD}{C-D+\cfrac{CE}{D-E+\text{ и т. д.}}}}}}$$

369. Если же все члены ряда будут числами дробными, так что

$$x=\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+\frac{1}{E}-\text{ и т. д.},$$

то для α, β, γ, δ и т. д. получатся следующие значения:

$$\alpha=\frac{b}{A},$$

$$\beta=\frac{Abc}{B-A},$$

$$\gamma=\frac{B^2cd}{(B-A)(C-B)},$$

$$\delta=\frac{C^2de}{(C-B)(D-C)},$$

$$\varepsilon=\frac{D^2ef}{(D-C)(E-D)}$$

и т. д.

$$\begin{array}{ll} \text{Положим } b=A, & \text{откуда } \alpha=1, \\ c=B-A, & \beta=A^2, \\ d=C-B, & \gamma=B^2, \\ e=D-C & \delta=C^2 \\ \text{и т. д.,} & \text{и т. д.;} \end{array}$$

тогда x выразится такой непрерывной дробью:

$$x=\cfrac{1}{A+\cfrac{A^2}{B-A+\cfrac{B^2}{C-B+\cfrac{C^2}{D-C+\text{ и т. д.}}}}}$$

ПРИМЕР 1

Требуется преобразовать бесконечный ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\text{ и т. д.}$$

в непрерывную дробь.

Имеем

$$A=1,\quad B=2,\quad C=3,\quad D=4 \text{ и т. д.};$$

так как значение данного ряда равно $l2$, то получаем

$$l2=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{9}{1+\cfrac{16}{1+\cfrac{25}{1+\text{ и т. д.}}}}}}}$$

ПРИМЕР 2

Требуется преобразовать бесконечный ряд [§ 140]

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\text{ и т. д.},$$

где π означает длину окружности с диаметром, равным единице, в непрерывную дробь.

Подставляя вместо A, B, C, D и т. д. числа 1, 3, 5, 7 и т. д., получим

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{ и т. д.};}}}}}$$

отсюда, беря обратную дробь, находим

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{ и т. д.};}}}}$$

это выражение для квадратуры круга впервые дал Броункер [§ 73].

ПРИМЕР 3

Пусть дан бесконечный ряд

$$x=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}+\text{ и т. д.};$$

так как

$$A=m,\quad B=m+n,\quad C=m+2n \text{ и т. д.},$$

то он обращается в такую непрерывную дробь:

$$x=\cfrac{1}{m+\cfrac{m^2}{n+\cfrac{(m+n)^2}{n+\cfrac{(m+2n)^2}{n+\cfrac{(m+3n)^2}{n+\text{ и т. д.};}}}}}$$

беря обратную дробь, получим

$$\frac{1}{x}-m=\frac{m^2}{n+\frac{(m+n)^2}{n+\frac{(m+2n)^2}{n+\frac{(m+3n)^2}{n+\text{ и т. д.}}}}}$$

ПРИМЕР 4

Так как по найденному выше (§ 178)

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\text{ и т. д.},$$

то для превращения дроби в непрерывную будем иметь

$$A=m,\quad B=n-m,\quad C=n+m,\quad D=2n-m \text{ и т. д.},$$

откуда

$$\frac{\pi\cos\frac{m\pi}{n}}{n\sin\frac{m\pi}{n}}=\frac{1}{m+\frac{m^2}{n-2m+\frac{(n-m)^2}{2m+\frac{(n+m)^2}{n-2m+\frac{(2n-m)^2}{2m+\frac{(2n+m)^2}{n-2m+\text{ и т. д.}}}}}}}$$

370. Если члены данного ряда представляют собою произведения с последовательно присоединяемыми множителями[1]), так что

$$x=\frac{1}{A}-\frac{1}{AB}+\frac{1}{ABC}-\frac{1}{ABCD}+\frac{1}{ABCDE}-\text{ и т. д.},$$

то получатся такие результаты:

$$\alpha=\frac{b}{A},\qquad \delta=\frac{Cde}{(C-1)(D-1)},$$
$$\beta=\frac{bc}{B-1},\qquad \varepsilon=\frac{Def}{(D-1)(E-1)}$$
$$\gamma=\frac{Bcd}{(B-1)(C-1)},\qquad \text{и т. д.}$$

Полагая поэтому

$$b=A,\qquad \text{откуда}\quad \alpha=1,$$
$$c=B-1,\qquad \beta=A,$$
$$d=C-1,\qquad \gamma=B,$$
$$e=D-1,\qquad \delta=C,$$
$$f=E-1\qquad \varepsilon=D$$
и т. д., и т. д.,

получим

$$x=\frac{1}{A+\frac{A}{B-1+\frac{B}{C-1+\frac{C}{D-1+\frac{D}{E-1+\text{ и т. д.}}}}}}$$

[1]) Si series proposita per continuos factores progrediatur.

ПРИМЕР 1

Выше [§ 123] мы нашли, что если e означает число, логарифм которого равен единице, то

$$\frac{1}{e}=1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\text{ и т. д.}$$

или

$$1-\frac{1}{e}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\text{ и т. д.}$$

Этот ряд обратится в непрерывную дробь, если положить

$$A=1,\quad B=2,\quad C=3,\quad D=4 \text{ и т. д.};$$

выполнив это получим

$$1-\frac{1}{e}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\text{ и т. д.}}}}}}};$$

отсюда, освобождаясь от асимметрии вначале, находим

$$\frac{1}{e-1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\text{ и т. д.}}}}}}$$

ПРИМЕР 2

Мы нашли также, что для дуги, равной радиусу, косинус равен [§ 134]

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot12}-\frac{1}{2\cdot12\cdot30}+\frac{1}{2\cdot12\cdot30\cdot56}-\text{ и т. д.}$$

Если, следовательно, положить

$$A=1,\quad B=2,\quad C=12,\quad D=30\quad E=56 \text{ и т. д.}$$

и косинус дуги, равной радиусу, положить равным x, то

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{11+\cfrac{12}{29+\cfrac{30}{55+\text{ и т. д.}}}}}}$$

или

$$\frac{1}{x}-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{11+\cfrac{12}{29+\cfrac{30}{55+\text{ и т. д.}}}}}$$

371. Пусть теперь ряд соединен с геометрическим, т. е.

$$x=A-Bz+Cz^2-Dz^3+Ez^4-Fz^5+\text{ и т. д.};$$

тогда

$$\alpha = A\text{в}, \qquad \delta = \frac{BDdez}{(B-Cz)(C-Dz)},$$

$$\beta = \frac{Bbcz}{A-Bz}, \qquad \varepsilon = \frac{CEefz}{(C-Dz)(D-Ez)},$$

$$\gamma = \frac{ACcdz}{(A-Bz)(B-Cz)}, \qquad \text{и т. д.}$$

Положим теперь $b = 1$, $c = A - Bz$, $d = B - Cz$, $e = C - Dz$ и т. д., откуда $\alpha = A$, $\beta = Bz$, $\gamma = ACz$, $\delta = BDz$ и т. д.;

тогда

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{Bz}{A - Bz + \cfrac{ACz}{B - Cz + \cfrac{BDz}{C - Dz + \text{и т. д.}}}}}$$

372. Для того чтобы более общим образом разобрать этот случай, положим

$$x = \frac{A}{L} - \frac{By}{Mz} + \frac{Cy^2}{Nz^2} - \frac{Dy^3}{Oz^3} + \frac{Ey^4}{Pz^4} - \text{ и т. д.};$$

при сравнении с предыдущим получится

$$\alpha = \frac{Ab}{L},$$

$$\beta = \frac{BLbcy}{AMz - BLy},$$

$$\gamma = \frac{ACM^2cdyz}{(AMz - BLy)(BNz - CMy)},$$

$$\delta = \frac{BDN^2\,deyz}{(BNz - CMy)(COz - DNy)}$$

и т. д.

Подставим для b, c, d и т. д. следующие значения:

$b = L$, $c = AMz - BLy$, $d = BNz - CMy$, $e = COz - DNy$, $f = DPz - EOy$ и т. д.,

откуда $\alpha = A$, $\beta = BL^2y$, $\gamma = ACM^2yz$, $\delta = BDN^2yz$, $\varepsilon = CEO^2yz$ и т. д.;

тогда заданный ряд выразится следующей непрерывной дробью:

$$x = \cfrac{A}{L + \cfrac{BL^2y}{AMz - BLy + \cfrac{ACM^2yz}{BNz - CMy + \cfrac{BDN^2yz}{COz - DNy + \text{и т. д.}}}}}$$

373. Пусть, наконец, данный ряд имеет вид

$$x=\frac{A}{L}-\frac{ABy}{LMz}+\frac{ABCy^2}{LMNz^2}-\frac{ABCDy^3}{LMNOz^3}+\text{ и т. д.};$$

при этом получатся следующие значения:

$$\alpha=\frac{Ab}{L}, \qquad \delta=\frac{DNdeyz}{(Nz-Cy)(Oz-Dy)},$$

$$\beta=\frac{Bbcy}{Mz-By}, \qquad \varepsilon=\frac{EOefyz}{(Oz-Dy)(Pz-Ey)}$$

$$\gamma=\frac{CMcdyz}{(Mz-By)(Nz-Cy)}, \qquad \text{и т. д.}$$

Для получения же целых значений положим

$$\begin{array}{lcl} b=Lz, & \text{откуда} & \alpha=Az, \\ c=Mz-By, & & \beta=BLyz, \\ d=Nz-Cy, & & \gamma=CMyz, \\ e=Oz-Dy & & \delta=DNyz, \\ f=Pz-Ey & & \varepsilon=EOyz \\ \text{и т. д.,} & & \text{и т. д.} \end{array}$$

Тогда значение данного ряда выразится так:

$$x=\cfrac{Az}{Lz+\cfrac{BLyz}{Mz-By+\cfrac{CMyz}{Nz-Cy+\cfrac{DNyz}{Oz-Dy+\text{ и т. д.}}}}},$$

или, чтобы закон последовательности стал ясен с самого же начала,

$$\frac{Az}{x}-Ay=Lz-Ay+\cfrac{BLyz}{Mz-By+\cfrac{CMyz}{Nz-Cy+\cfrac{DNyz}{Oz-Dy+\text{ и т. д.}}}}$$

374. Этим путем могут быть найдены бесчисленные непрерывные дроби с бесконечным числом членов, истинное значение которых может быть обнаружено. Так как, по сказанному выше, для этой цели можно привлечь бесконечные ряды, суммы которых известны, то каждый из них может быть преобразован в непрерывную дробь, значение которой будет равно сумме этого ряда. Приведенных уже здесь примеров достаточно для того, чтобы показать это применение; однако желательно указание такого метода, с помощью которого могло бы быть непосредственно найдено значение любой данной непрерывной дроби. Хотя непрерывная дробь может быть преобразована в бесконечный ряд, сумму которого можно определить известными способами, однако ряды эти по большей части бывают так запутаны, что суммы их, хотя бы они и были довольно простыми, можно получить лишь с трудом или даже совсем невозможно получить.

375. Чтобы было яснее видно, что существуют непрерывные дроби, значение которых может быть легко определено другим способом, хотя бы об этом значении ничего нельзя было сказать на основании бесконечных рядов, в которые эти дроби обращаются, рассмотрим такую

непрерывную дробь:

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{ и т. д.},}}}}$$

все знаменатели которой между собой равны. Теперь составим по изложенному выше способу дроби

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{1}{0}, & \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{5}, & \frac{5}{12}, & \frac{12}{29}, & \frac{29}{70} \end{matrix} \text{ и т. д.;}$$

отсюда получается ряд

$$x=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 12}-\frac{1}{12\cdot 29}+\frac{1}{29\cdot 70}-\text{ и т. д.},$$

или, если соединить члены по два,

$$x=\frac{2}{1\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 29}+\frac{2}{29\cdot 169}+\text{ и т. д.},$$

а также

$$x=\frac{1}{2}-\frac{2}{2\cdot 12}-\frac{2}{12\cdot 70}-\text{ и т. д.}$$

Далее, так как

$$x=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 12}-\frac{1}{2\cdot 12\cdot 29}+\text{ и т. д.}$$

$$+\frac{1}{4}-\frac{1}{2\cdot 2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 12}-\frac{1}{2\cdot 12\cdot 29}+\text{ и т. д.},$$

то имеем

$$x=\frac{1}{4}+\frac{1}{1\cdot 5}-\frac{1}{2\cdot 12}+\frac{1}{5\cdot 29}-\frac{1}{12\cdot 70}+\text{ и т. д.};$$

хотя эти ряды весьма быстро сходятся, то все же сумму их по их виду найти нельзя.

376. Однако существует легкий способ выражения сумм для непрерывных дробей такого рода, у которых знаменатели либо все одинаковы, либо все снова и снова повторяются, так что эта дробь, если отнять от начала несколько членов, все же останется равной всей дроби. Так, в данном примере, поскольку

$$x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{ и т. д.},}}}}$$

имеем

$$x=\frac{1}{2+x}$$

и, значит,

$$x^2+2x=1$$

и

$$x+1=\sqrt{2},$$

так что значение этой непрерывной дроби равно

$$\sqrt{2}-1.$$

Дроби же, полученные раньше из непрерывной, подходят к этому значению все ближе и ближе и притом столь быстро, что едва ли можно найти более быстрый способ приближенного выражения этого иррационального значения посредством рациональных чисел. Так, значение $\sqrt{2}-1$ столь близко к $\frac{29}{70}$, что погрешность не заметна; действительно, извлекая корень, получим

$$\sqrt{2}-1=0{,}414\,213\,562\,37,$$

а

$$\frac{29}{70}=0{,}414\,285\,714\,28,$$

так что погрешность содержится только в стотысячных долях.

377. Таким же образом, каким непрерывные дроби дают весьма удобный способ приближения к значению $\sqrt{2}$, они позволяют с большей легкостью находить приближение для корней из других чисел. Для этого положим

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\text{ и т. д.},}}}}}$$

тогда

$$x=\frac{1}{a+x}$$

и

$$x^2+ax=1;$$

отсюда

$$x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{1+\frac{1}{4}a^2}=\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}.$$

Следовательно, такая непрерывная дробь служит для нахождения величины квадратного корня из числа a^2+4. Отсюда, подставляя вместо a последовательно числа 1, 2, 3, 4 и т. д., найдем $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{29}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{53}$ и т. д., причем эти корни приведены, конечно, к простейшему виду. Так, будем иметь

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{5}, & \frac{5}{8} \text{ и т. д.} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{5}, & \frac{5}{12}, & \frac{12}{29}, & \frac{29}{70} \text{ и т. д.} = \sqrt{2}-1, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{3}, & \frac{3}{10}, & \frac{10}{33}, & \frac{33}{109}, & \frac{109}{360} \text{ и т. д.} = \frac{\sqrt{13}-3}{2}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{4}, & \frac{4}{17}, & \frac{17}{72}, & \frac{72}{305}, & \frac{305}{1292} \text{ и т. д.} = \sqrt{5}-2. \end{array}$$

Надо отметить, что приближение будет тем более быстрым, чем больше число a; так, в последнем примере

$$\sqrt{5} = 2\frac{305}{1292},$$

так что ошибка меньше, чем $\frac{1}{1292\cdot 5473}$, где 5473 есть знаменатель следующей дроби $\frac{1292}{5473}$.

378. Но этим способом могут быть выражены корни только таких чисел, которые представляют сумму двух квадратов. Для распространения этого приближения на другие числа положим

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \text{ и т. д.}}}}}}};$$

тогда

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b+x}} = \frac{b+x}{ab+1+ax};$$

поэтому

$$ax^2 + abx = b,$$

$$x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a}} = \frac{-ab + \sqrt{a^2b^2+4ab}}{2a}.$$

Отсюда уже можно найти корни всех чисел. Так, например, если $a = 2$, $b = 7$, то

$$x = \frac{-14+\sqrt{14\cdot 18}}{4} = \frac{-7+3\sqrt{7}}{2},$$

причем значение x приближенно выражается дробями

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 7 & 2 & 7 & 2 & 7 \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{7}{15}, & \frac{15}{32}, & \frac{112}{239}, & \frac{239}{510} \text{ и т. д.} \end{array}$$

Итак, приближенно

$$\frac{-7+3\sqrt{7}}{2} = \frac{239}{510}$$

и

$$\sqrt{7} = \frac{2024}{765} = 2{,}645\,751\,63,$$

на самом же деле

$$\sqrt{7} = 2{,}645\,751\,31,$$

так что погрешность меньше, чем $\frac{33}{100\,000\,000}$.

379. Идя далее, положим

$$x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\text{ и т. д.}$$

Тогда

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x}}}=\cfrac{1}{a+\cfrac{c+x}{bx+bc+1}}=\frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c};$$

отсюда

$$(ab+1)x^2+(abc+a-b+c)x=bc+1$$

и

$$x=\frac{-abc-a+b-c+\sqrt{(abc+a+b+c)^2+4}}{2(ab+1)};$$

здесь количество под знаком радикала опять представляет сумму двух квадратов, стало быть, эта форма служит для извлечения корней только из таких чисел, для которых была достаточной первая форма. Подобным образом, если знаменатели непрерывной дроби составляют четыре повторяющихся все время буквы a, b, c, d, то эта дробь пригодна не более второй, которая заключала только две буквы, и т. д.

380 Так как непрерывные дроби могут со столь большой пользой применяться к извлечению квадратного корня, то они вместе с тем служат и для решения квадратных уравнений, что ясно из приведенных вычислений, поскольку x определялось из квадратного уравнения. Но легко можно, и обратно, выразить корень любого квадратного уравнения посредством непрерывной дроби. Пусть дано уравнение

$$x^2=ax+b;$$

так как в нем

$$x=a+\frac{b}{x},$$

то, подставив в последнем члене вместо x найденное значение, получим

$$x=a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{x}};$$

поступая и далее подобным образом, найдем для x выражение в виде бесконечной непрерывной дроби

$$x=a+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\text{ и т. д.},$$

однако эта дробь не столь удобна для применения, поскольку числители не являются единицами.

381. Чтобы показать применение [непрерывных дробей] в арифметике, заметим сначала, что всякую обыкновенную дробь можно обратить

в непрерывную. Пусть дана дробь

$$x = \frac{A}{B},$$

где $A > B$; разделим A на B, и пусть частное равно a, а остаток C; затем разделим на этот остаток C предыдущий делитель B, и пусть получится частное b и остаток D, на который снова разделим предыдущий делитель C; таким образом будет продолжаться этот процесс, применяемый обычно для нахождения общего наибольшего делителя чисел A и B до тех пор, пока он не кончится сам собою; итак,

$$\begin{array}{lllll} B)\,\frac{A}{C)}\,(a & & & & \\ & \frac{B}{D)}\,(b & & & \\ & & \frac{C}{E)}\,(c & & \\ & & & \frac{D}{F}\,(d & \\ & & & & \text{и т. д.,} \end{array}$$

и согласно природе деления будем иметь

$$\begin{array}{lll} A = aB + C, & \text{откуда} & \dfrac{A}{B} = a + \dfrac{C}{B}, \\ B = bC + D, & & \dfrac{B}{C} = b + \dfrac{D}{C}, \quad \dfrac{C}{B} = \dfrac{1}{b + \dfrac{D}{C}}, \\ C = cD + E, & & \dfrac{C}{D} = c + \dfrac{E}{D}, \quad \dfrac{D}{C} = \dfrac{1}{c + \dfrac{E}{D}}, \\ D = dE + F & & \dfrac{D}{E} = d + \dfrac{F}{E}, \quad \dfrac{E}{D} = \dfrac{1}{d + \dfrac{F}{E}} \\ \text{и т. д.} & & \text{и т. д.} \end{array}$$

Следовательно, подставляя последующие значения в предыдущие, получим

$$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \frac{1}{b + \dfrac{D}{C}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{E}{D}}},$$

откуда, наконец, x выразится посредством одних только найденных частных a, b, c, d и т. д. следующим образом:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \text{и т. д.}}}}}}$$

ПРИМЕР 1

Пусть дана дробь $\frac{1461}{59}$; ее можно преобразовать в непрерывную дробь, все числители которой равны единице. А именно, производим такое действие, посредством которого обычно находится общий наибольший делитель чисел 59 и 1461:

```
59) 1461 (24
    118
    ---
     281
     236
     ---
      45) 59 (1
          45
          --
          14) 45 (3
              42
              --
               3) 14 (4
                  12
                  --
                   2) 3 (1
                      2
                      -
                      1) 2 (2
                         2
                         -
                         0 .
```

Следовательно, из этих частных получаем

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

ПРИМЕР 2

Десятичные дроби также можно преобразовывать этим способом. Пусть, например, дана дробь

$$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,56 = \frac{141\,421\,356}{100\,000\,000};$$

производим такое действие:

100 000 000	141 421 356	1
82 842 712	100 000 000	2
17 157 288	41 421 356	2
14 213 560	34 314 576	2
2 943 728	7 106 780	2
2 438 648	5 887 456	2
505 080	1 219 324	2
418 328	1 010 160	2
86 752	209 164	

и т. д.

Из хода действия видно, что все знаменатели будут равны 2, и, значит,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{и т. д.}}}}},$$

что известно уже из предыдущего.

ПРИМЕР 3

Особенно заслуживает внимания число e, логарифм которого равен единице и которое равно

$$e = 2{,}718\,281\,828\,459.$$

Отсюда имеем

$$\frac{e-1}{2} = 0{,}859\,140\,914\,2295;$$

эта десятичная дробь при указанном выше способе преобразования даст следующие частные:

8 591 409 142 295	10 000 000 000 000	1
8 451 545 146 224	8 591 409 142 295	6
139 863 996 071	1 408 590 857 704[1])	10
139 312 557 916	1 398 639 960 710	14
551 438 155	9 950 896 994	18
550 224 488	9 925 886 790	22
1 213 667	25 010 204	

и т. д.

Если продолжать это вычисление значения e до больших степеней точности, то получатся такие частные:

$$1,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ 22,\ 26,\ 30,\ 34 \text{ и т. д.};$$

они, за исключением первого, составляют арифметическую прогрессию; отсюда ясно, что мы получим

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cfrac{1}{\text{и т. д.}}}}}}}}$$

Обоснование этой дроби может быть дано с помощью исчисления бесконечных [74].

382. Так как из выражений этого рода могут быть получены дроби, которые весьма быстро приводят к истинному значению рассматриваемого выражения, то этот метод можно применить к выражению десятичных дробей посредством простых, весьма близко к ним подходящих. Даже когда дана дробь, у которой числитель и знаменатель являются числами очень большими, то можно найти дроби, состоящие из меньших чисел, если и не равные в точности данной, то отличающиеся от нее очень мало. Так, можно легко решить вопрос, рассматривавшийся когда-то Валлисом, относительно нахождения дробей, выраженных меньшими числами, которые представляли бы значение какой-либо дроби, данной в больших числах, настолько близко, насколько это только

---

1) В действительности последняя цифра здесь не 4, а 5, и это сказывается на дальнейшем вычислении. [*Ф. Р.*]

возможно при числах небольших [75]. Дроби, построенные по нашему методу, подходят так близко к значению непрерывной дроби, из которой они получаются, что нет других дробей, состоящих из числителя и знаменателя, не бóльших, чем эти, которые подходили бы ближе.

ПРИМЕР 1

Выразим отношение окружности к диаметру столь малыми числами, чтобы его нельзя было выразить точнее, не употребляя чисел бóльших.

Если известную десятичную дробь 3,141 592 6535 и т. д. развернуть указанным способом непрерывного деления, то получатся следующие частные:

$$3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1 \text{ и т. д.};$$

из них образуются следующие дроби:

$$\frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103\,993}{33\,102} \text{ и т. д.}$$

Вторая дробь показывает уже, что отношение диаметра и окружности приблизительно равно $1:3$, и оно действительно не может быть дано точнее при числах, не больше этих. Третья дробь дает архимедово отношение $7:22$; пятая же — отношение Меция, которое так близко подходит к истинному значению, что ошибка меньше $\frac{1}{113\cdot 33\,102}$ [76]. Впрочем, дроби эти попеременно то больше, то меньше истинного значения.

ПРИМЕР 2

Выразим приближенно наименьшими числами отношение дня к среднему солнечному году. Так как год этот равен $365^d5^h48^m55^s$, то в виде дроби один год содержит

$$365\,\frac{20\,935}{86\,400}$$

дней. Надо только развернуть эту дробь; она даст следующие частные:

$$4,\ 7,\ 1,\ 6,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,$$

откуда получаются дроби

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{55}{227},\ \frac{63}{260},\ \frac{181}{747} \text{ и т. д.}$$

Итак, часы с минутами и секундами, сверх 365 дней, составляют около одного дня за 4 года; отсюда происходит юлианский календарь. Точнее же, за 33 года получается 8 дней или за 747 лет 181 день; отсюда следует, что за 400 лет излишек составляет 97 дней. Поэтому в то время, как за этот промежуток юлианский календарь вставляет 100 дней, грегорианский каждые 4 столетия 3 високосных года обращает в простые.

КОНЕЦ ПЕРВОГО ТОМА

ПРИМЕЧАНИЯ

1. (К § 7.) Взгляд, по которому корень всякого уравнения должен равняться некоторому выражению, составленному из переменной и постоянных, Эйлер высказывал неоднократно; ср., кроме § 8 и 17 этой книги, работы: «De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio», Comment. acad. sc. Petrop., 6 (1732/3), 1738, стр. 216 и «De resolutione aequationum cuiusvis gradus», Novi comment. acad. sc. Petrop., 6 (1762/3), 1764, стр. 70; Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 6, стр. 1 и 170. [*А. К.*]

2. (К § 7.) Относительно *интерсцендентных* выражений см. письмо Лейбница к Валлису от 28 мая 1697 г.; Leibnitz, Mathematische Schriften, herausg. von C. I. Gerhardt, I отд., т. 4, Галле 1859, стр. 28. [*А. К.*]

3. (К § 17.) См. I. Newton, Arithmetica universalis, Кембридж 1707, 3-е лейденское изд. 1732 г., стр. 57—63. См., далее, работу Эйлера «Nouvelle méthode d'eliminer les quantités inconnues des équations», Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin [20] (1764), 1766, стр. 91; Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 6, стр. 197. [*А. К.*]

4. (К § 28.) Приблизительно одновременно А. Жирар («L'invention nouvelle en l'Algèbre», Амстердам, 1629) и Декарт («La Géométrie», приложение к книге «Discours de la Méthode», Лейден, 1637, написано много ранее выхода в свет) открыли, что уравнение *может иметь* столько корней, сколько неизвестное имеет измерений, т. е. что такое число корней является *максимальным*. Декарт прибавляет к этому, что для того, чтобы число корней всегда равнялось измерению неизвестного, «можно вообразить себе столько корней, сколько сказано»; иными словами, в мнимых корнях Декарт не видел настоящих решений уравнения. Только Эйлер впервые установил, что *всякое* алгебраическое уравнение n-й степени не только может, но и *должно* иметь ровно n корней или, точнее, как выражается сам Эйлер[1]), всякое выражение вида

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$$

с действительными коэффициентами всегда может быть разложено на такое число действительных множителей первой или второй степени, что сумма их степеней равна n. Однако и в разбираемом нами месте Эйлер никаких доказательств этого утверждения не дает. Это для него «непосредственно явствует» («statim liquet, perspicuum est») из того факта, что

[1]) Письмо к Гольдбаху от 15 декабря 1742 г. (Corr. math., т. I, стр. 171).

$j+gz+hz^2$ разлагается на два, а $j+gz+hz^2+iz^3$ — на три простых множителя (т. е. таких, в которые z входит в первой степени). Строгое доказательство этой теоремы дал впервые Гаусс в 1799 г. [*С. Л.*]

Однако не следует считать на основании такого изложения, обусловленного, вероятно, методическими соображениями, что для Эйлера подобная аргументация была настоящим доказательством. В работе 1749 г. «Recherches...» (см. примечание [5]) Эйлер дает доказательство основной теоремы алгебры, не безупречное по замыслу, но глубокое и плодотворное. См. об этом статью И. Г. Башмаковой в Историко-математических исследованиях т. X (1957 г.). [*И. П.*]

5. (К § 20.) Ср. § 35 и 36; ср. далее статью «Recherches sur les racines imaginaires des équations», Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin, 5 (1749), 1751, стр. 222; Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 6, стр. 78. [*А. К.*]

6. (К § 31.) См. § 9 указанной в [5] статьи Эйлера, особенно дополнительное замечание к нему. [*А. К.*]

7. (К § 37.) Обращаем внимание читателя на содержащееся в § 37 (с леммой в § 33) исключительно изящное доказательство положения, что всякое уравнение с четной высшей степенью и отрицательным свободным членом имеет по крайней мере два вещественных корня, из которых один положительный, другой отрицательный. В 1749 г.[1]) Эйлер вернулся к этой теореме и доказал ее также и геометрически, красиво иллюстрируя свое доказательство кривой

$$y=x^{2m}+\alpha x^{2m-1}+\beta x^{2m-2}+\ldots-O^2.$$

В самом деле (рис. 1), нетрудно убедиться, что при $x=-\infty$ имеем $y=+\infty$, и кривая находится во втором квадранте; при $x=+\infty$ имеем $y=+\infty$, и кривая находится в первом квадранте; при $x=0$ имеем

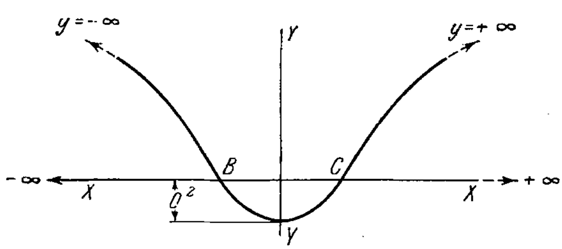

Рис. 1

$y=-O^2$ и, следовательно, кривая в точке A переходит из третьего квадранта в четвертый. Итак, кривая должна где-то на своем пути переходить из второго квадранта в третий (скажем, в точке B) и из четвертого в первый (скажем, в точке C). Очевидно, при $y=0$, x имеет в C действительное положительное, а в B действительное отрицательное значение. Разумеется, при этих доказательствах используются свойства непрерывных функций и кривых, которые в XVIII веке никто из математиков не считал требующими обоснования. [*С. Л.*]

[1]) Histoire de l'Académie de Berlin, 1749, стр. 232—235.

8. (К § 41.) См. статьи Эйлера «Nova methodus fractiones quascunque rationales in fractiones simplices resolvendi», *Acta acad. sc. Petrop.*, 1780, 1, 1783, стр. 32 и «De resolutione fractionum compositarum in simpliciores», *Mém. de l'acad. d. sc. de St.-Pétersbourg*, I (1803/6), 1809, стр. 3; Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 6, стр. 370 и 465. [*А. К.*].

9. (К § 46.) Принадлежащая Эйлеру и осуществленная здесь идея выражения алгебраических уравнений между двумя переменными в независимой форме при помощи третьей (которую теперь, допуская contradictio in adiecto, называют «переменным параметром») сыграла большую роль в истории математики. Эйлеру удалось применить этот прием, во-первых, для уравнений вида тринома, во-вторых, для таких уравнений, которые представляют конические сечения и кривые третьего порядка с двойной точкой; наконец, для уравнений с членами трех различных измерений, из которых одно — среднее арифметическое между двумя другими. В этих последних случаях выражение в параметре оказывается иррациональным.

Такого рода подстановка встречается также у Крамера («Introduction á l'analyse de lignes courbes algébriques», Женева, 1750). Он применяет этот прием с целью вычисления точек кривой. В противоположность Эйлеру у Крамера этот прием является не правильно действующим математическим интрументом, а применяется случайно как artifice algébrique. [*С. Л.*]

10. (К § 53.) Так как имеются три неизвестных: q, r и p и только два уравнения, то допущение, что $p=\alpha-\beta$, правомерно. По той же причине в дальнейшем принимается $p=\mu$. [*С. Л.*]

11. (К § 71.) См. Euler, Institutiones calculi differentialis, Petropoli 1755, г. II, гл. IV; Leonhardi Euleri, Opera omnia, серия 1, т. 10, стр. 276 (Л. Эйлер, Дифференциальное исчисление, М.—Л., 1937, ч. II, гл. IV). См., далее, статью Эйлера «Demonstratio theorematis Neutoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri», *Novi comment. acad. sc. Petrop.*, 19 (1774), 1755, стр. 103; Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 15. [*А. К.*]

Характерно, что в этом и последующих параграфах законы бинома и полинома, совсем в стиле Валлиса, без дальнейших рассуждений распространяются и на случай с дробными показателями, как если бы правомерность такого распространения была чем-то само собой подразумевающимся. [*С. Л.*]

12. (К § 83.) Термин homogeneus, «однородный», в том же смысле встречается уже у Виета во второй половине XVI в. (Fr. Vieta, Opera mathematica, Лейден, 1646, стр. 4), у Лейбница («Mathematische Schriften» herausg. von C. I. Gerhardt, II отд., т. 3, Галле, 1853, стр. 65) уже выделена особая категория выражений, составленных согласно lex homogeneorum, что по существу равнозначно выражению functio homogenea. Но самый термин functio homogenea впервые введен Ив. Бернулли в его статье «De integrationibus aequationum differentialium etc.», *Comment. acad. sc. Petrop.*, I (1726), 1728, стр. 167 (Opera omnia, Лозанна и Женева, 1742, т. III, стр. 108). [*А. К.*]

У Бернулли Эйлер заимствовал этот термин вместе с его определением, которое у Бернулли сформулировано так: «p и q обозначают рациональные и однородные функции (functiones rationales et homogeneas) неопределенных (т. е. переменных —*С. Л.*) x и y, связанных и перемешанных между собою любым образом, лишь бы только неопределенные в каждом члене имели одну и ту же сумму показателей. Поэтому я называю функции, составленные таким способом, «однородными». [*С. Л.*]

13. (К § 101.) Более точно: 3,162 278, именно: 3,162 7766. [*А. К.*]

14. (К § 105.) Утверждая, что кроме степеней основания a не существует никакого рационального числа b с рациональным логарифмом. Эйлер прибавляет к этому *без всякого доказательства*, что логарифм b не может также быть и (алгебраическим) иррациональным числом и поэтому должен относиться к трансцендентным числам. Такие чисто интуитивно полученные утверждения встречаются у Эйлера. [*С. Л.*]

15. (К § 106.) Более точные значения для lK и lL:

$$lK = 0{,}699\,218\,7500$$

и

$$lL = 0{,}697\,265\,6250,$$

откуда более точное значение для lM:

$$lM = 0{,}698\,242\,1875$$

или, если взять семь знаков,

$$lM = 0{,}698\,2422.$$

Соответственно следует внести незначительные изменения и во все дальнейшие логарифмы. [*А. К.*]

16. (К § 106). H. Brigg, «Arithmetica logarithmica sive logarithmorum chiliades triginta etc.», Лондон, 1624; A. Vlacq, «Arithmetica logarithmica sive logarithmorum chiliades centum etc.», Goudae, 1628. Ср. также I. Neper, Mirifici logarithmorum canonis constructio, Appendix, Эдинбург, 1619. [*А. К.*]

17. (К § 110.) Третий пример чрезвычайно характерен для Эйлера. Наряду с сообщением навыков в пользовании логарифмами он имеет целью показать, что точные науки не только не опровергают священного писания, но, наоборот, служат добавочным подтверждением его непререкаемой правильности. Он берет самое неправдоподобное библейское представление, по которому население земного шара после потопа равнялось 6 человекам, а уже через 200 лет должно было равняться примерно миллиону. Для того чтобы это было верно, как показывает Эйлер, необходимо, чтобы количество народонаселения увеличивалось ежегодно только на 1/16 часть. Впрочем, прибавляет он, и эта цифра несоразмерно велика, ибо, если бы число людей и в дальнейшем продолжало так возрастать, то ныне оно достигало бы 167 миллиардов, т. е. им бы не нашлось места на всем земном шаре. Но он ссылается на то, что по свидетельству библии в те времена люди отличались особенно большим долголетием — жили до 900 лет и потому прирост населения был больше, чем впоследствии.

Необходимо обратить при этом внимание на то, что как раз около этого времени Эйлер в вопросах об отношении науки и религии был под сильным влиянием Беркли; он не только с восторгом ухватился за выдвинутый Мопертюи закон наименьшего действия, доказывавший благость и премудрость Провидения, но и в особой, выпущенной анонимно, брошюре «Die Verteidigung der heiligen Offenbarung von den Einwürfe der Freigeiste», вышедшей в этом же году, пытался доказать, что наука ни в чем не противоречит библии, а наоборот, только подтверждает ее. См. мою статью «Переписка Эйлера» в сборнике «Леонард Эйлер», изданном Институтом истории науки и техники Академии наук СССР, Л., 1935, стр. 159—162, ср. стр. 77—78. [*С. Л.*]

18. (К § 111.) Из первого примера мы видим, что идея чисто математического подхода к вопросу о росте народонаселения, приведшая Эйлера в 1760 г. к специальному исследованию «Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain», появилась у него уже в это время. Содержащееся во втором примере уравнение

$$n^x a = \frac{n^x b - b}{n-1}$$

носит теперь название уравнения амортизации. [*С. Л.*]

19. (К § 112.) Название «mantissa» для дробной части логарифма впервые введено Эйлером, слово mantissa употреблено было Валлисом просто для обозначения дробной части числа, состоящего из целого и десятичной дроби; Эйлер здесь впервые придал ему значение специфического термина для учения о логарифмах. См. P. Stäckel, Eulers Verdienste um die elementare Mathematik, *Zeitschr. für math. und naturwiss. Unterricht*, 38, стр. 304, 1907. [*С. Л.*]

20. (К § 113.) В первом издании отсутствует последняя цифра $l2$, однако она необходима для достаточно точного вычисления мантиссы 259733675932. Впрочем, значение $l2$ (равно как и значение для k и $\frac{1}{k}$) Эйлер мог позаимствовать из исследования Галлея (E. Halley, A most compendious and facile method for constructing *the logarithms*, *Philosophical Transactions* (Лондон) 19, n° 216,1695, стр. 58); здесь эти и другие значения вычислены с 60 знаками (вычисление производил A. Sharp). Этот же пример находится и в «Дифференциальном исчислении» Эйлера, ч. II, гл. IV, § 82. [*А.К.*]

21. (К § 114 и след.) Здесь ход мыслей очень близок к ходу мыслей у Галлея (E. Halley, статья, указанная в предыдущем примечании). Эйлер не называет Галлея; как справедливо полагает М. Кантор, причина этого не в том, что Эйлер не знал исследования Галлея, а в том, что он считал открытие с давностью в 50 лет уже общим достоянием. Впрочем, Эйлер в предисловии сам указывает, что, к сожалению, лишен возможности каждый раз называть своих предшественников. [*С. Л.*]

22. (К § 114.) Выражение: «Если ω будет числом бесконечно малым, т. е. столь малой дробью, что она только-только не равна нулю», характерно для лейбницевской концепции бесконечно малого, но противоречит взглядам самого Эйлера, последовательно изложенным им во Введении и в гл. 4 его «Дифференциального исчисления» (*написано* в том же 1748 г., издано в 1755 г.): здесь Эйлер, вслед за Ньютоном, считает бесконечно малое не почти, а совершенно равным нулю (так называемое «исчисление нулей»). См. вступительную статью А. П. Юшкевича к книге: Л. Карно,

«Размышления о метафизике бесконечно малых», ГТТИ, М., 1933, стр. 12 и 15, а также примечание М. Я. Выгодского на стр. 365—366 «Истории математики в XVI и XVII вв.» Г. Г. Цейтена, ГТТИ, М., 1933, и мою статью «Эйлер и его исчисление нулей» в сборнике «Леонард Эйлер», изданном Институтом истории науки и техники Академии наук СССР, Л., 1935, стр. 51—81. [*С. Л.*]

23. (К § 120 и след.) О трактовке расходящихся рядов у Эйлера см. в этом томе статью А. Шпайзера. [*И. П.*]

24. (К § 123.) Обозначение основания натуральных логарифмов буквой e ввел впервые Эйлер в 1728 г., см. G. Eneström, *Biblioth. Mathem.*, 3 серия, т. 14, стр. 81, и 5, стр. 310. Это же обозначение он постоянно применяет в книге, озаглавленной «Mechanica sive motus scientia analytice exposita», С.-Петербург, 1736 (Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 2, т. 1 и 2). Впрочем, в статье «Specimen de constructione aequationum differentialium», напечатанной в *Comment. acad. scient. Petrop.*, 6 (1732/3), 1738 (Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 20, стр. 1), вместо буквы e (как раньше) употребляется буква c, хотя эта статья написана в 1733 г. [*А. К.*]

25. (К § 125.) Формула $e^z=\left(1+\frac{z}{i}\right)^i$ для частного случая $z=1$ в виде

$$\left(1+\frac{1}{A}\right)^A=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\text{ и т. д.}$$

была найдена Дан. Бернулли еще до 1728 г., о чем он сообщил Гольдбаху в письме от 30 января 1728 г. («Corresp. mathém.» par Fuss, т. II, стр. 246). [*С. Л.*]

26. (К § 126.) «Радиус круга или полный синус» — здесь синус еще мыслится по-старому не как функция, а как прямая в круге; эта прямая достигает своей «полной» величины, единицы или радиуса, когда угол равен 90°. [*С. Л.*]

27. (К § 126.) Значение π Эйлер заимствовал из исследования Th. F. de Lagny, «Mémoire sur la quadrature du cercle, et sur la mesure de tout arc, tout secteur et tout segment donné», *Mém. de l'acad. d. sc. de Paris* (1719), 1721, стр. 135. Ср. статью Эйлера «De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 9 (1737), 1744, стр. 222 (Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 14). Сто тринадцатый знак, заимствованный Эйлером у Ланьи, не верен; как указал G. de Vega, Thesaurus logarithmorum completus, Лейпциг, 1794, стр. 633, эта цифра не 7, а 8. [*А. К.*]

28. (К § 126.) До Эйлера отношение окружности к радиусу не обозначалось, как ныне, кратко отдельным символом (буквой), а пространно описывалось несколькими словами. Но есть и ряд интересных исключений. Так, J. Chr. Sturm в книге «Mathesis enucleata», Нюрнберг, 1689, стр. 81, пишет: «Если диаметр какого-либо круга принять за a, то окружность придется называеть ea (чему бы ни равнялось отношение окружности к диаметру, мы можем обозначить его именем e)». Буквой π назвал отношение окружности к диаметру впервые У. Джонс (W. Jones, «Synopsis

palmariorum matheseos or new introduction to the mathematics», Лондон, 1706, стр. 243). Заслуга Эйлера состоит в том, что он первый сделал этот способ обозначения всеобщим. Уже в книге «Mechanica sive motus scientia analytica exposita» он часто, хотя и не всюду, обозначает отношение окружности к диаметру буквой π. Кроме того, буква π встречается в его статье «Variae observationes circa series infinitas», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 9 (1737), 1744, стр. 160 (Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 14). В статье, указанной в предыдущем примечании, как и в некоторых других ранних работах, Эйлер вместо π писал p, но с этих пор употребление буквы π становилось все более преобладающим, пока не стало единственным общепризнанным, особенно со времени выхода в свет «Введения».

Истории числа π и вообще истории квадратуры круга посвящены книги: Ф. Рудио «Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр. О квадратуре круга» (перев. прив.-доц. С. Бернштейна, Одесса, 1911, новое издание ОНТИ, М.—Л., 1936) и E. W. Hobson'a, Squaring the circle, a history of the problem, 1913. [*А. К.*]

29. (К § 133.) Это — знаменитая формула Моавра. Для сравнения приводим то место из «Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis» Моавра (Лондон, 1730, стр. 1—2), где впервые встречаем эту формулу:

«Лемма 1. Если l и x — косинусы двух дуг A и B, каждая из которых описана тем же радиусом 1 и из которых первая во столько же раз больше второй, во сколько n больше единицы, то будет

$$x=\frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}}$$

(т. е. в наших символах

$$\cos B=\frac{1}{2}\sqrt[n]{\cos nB+\sin nB\sqrt{-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\cos nB+\sin nB\sqrt{-1}}}\ [\textit{С. Л.}]\Bigg).$$

«Следствие 1. Примем $\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}=z$, откуда будет

$$z^n=l+\sqrt{l^2-1}$$

или

$$z^n-l=\sqrt{l^2-1},$$

или, возведя обе части в квадрат,

$$z^{2n}-2lz^n+l^2=l^2-1;$$

отняв от обеих частей равное и перенеся, получим

$$z^{2n}-2lz^n+1=0,$$

но также, ввиду того, что мы приняли

$$\sqrt{l+\sqrt{l^2-1}}=z,$$

получим согласно приведенной выше лемме

$$x=\frac{1}{2}z+\frac{\frac{1}{2}}{z}$$

или

$$z^2-2xz+1=0.$$

«Следствие 2. Поэтому, если из двух уравнений:

$$1-2lz^n+z^{2n}=0,$$
$$1-2xz+z^2=0$$

исключить количество z, то получим новое уравнение, из которого определится отношение между косинусами l и x».

В самом деле, решая эти два уравнения, выведенные Моавром, получим

$$z^n=l\pm\sqrt{l^2-1},$$
$$z=x\pm\sqrt{x^2-1},$$

откуда

$$(x\pm\sqrt{x^2-1})^n=l\pm\sqrt{l^2-1}$$

или в наших символах

$$(\cos B\pm\sin B\sqrt{-1})^n=\cos nB\pm\sin nB\sqrt{-1}.$$

Положенная в основу этого рассуждения формула

$$x=\frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}}$$

выведена Моавром в схолии к этому месту в кн. II (являющейся схолией к кн. I, гл. I, стр. 1—2). Я опускаю все то, что не имеет прямого отношения к интересующей нас проблеме.

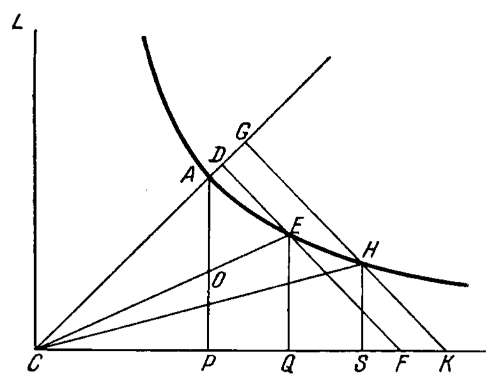

Рис. 2

«В начале 1707 г. или несколько раньше я предложил сам себе для разрешения такую задачу. В равнобочной гиперболе AH (рис. 2), центр которой C, вершина A, полуось CA равна единице, к оси проведена ордината DE, которой соответствует гиперболический сектор ACE. Найти такую ординату GH, чтобы ей соответствовал гиперболический сектор ACE и чтобы второй сектор относился к первому как n к 1.

«Я обозначил DE через y, HG через v...».

Моавр здесь разрешает попутно целый ряд побочных проблем, чрезвычайно интересных самих по себе, но не имеющих отношения к той лемме 1 книги I, которую он здесь хочет объяснить, и продолжает (в дальнейшем я применяю нынешние обозначения):

«Я провел асимптоты CK и CL, затем продолжил ординаты DE и GH до пересечения с асимптотой CK в F и K и провел AP и EQ перпендикулярно к той же асимптоте. Так как я знал, что сектор ACE равен площ. $APQE$, сектор ACH равен площ. $APSH$[1]), а эти площади суть логарифмы отношений[2]) $\frac{AP}{QE}$ и $\frac{AP}{SH}$ или (ввиду подобия треугольников ACP, EQF и HSK) — отношений $\frac{AC}{EF}$ и $\frac{AC}{HK}$, или $\frac{1}{EF}$ и $\frac{1}{HK}$, то я и заключил, что логарифм отношения $\frac{1}{EF}$ так относится к логарифму отношения $\frac{1}{HK}$, как 1 к n, вследствие чего $EF^n = HK$; но так как я обозначил DE через y, а GH через v, то путем простого вычисления я получил, что $EF = \sqrt{1+y^2} - y$, а $HK = \sqrt{1+v^2} - v$. Далее... из уравнения

$$(\sqrt{1+y^2} - y)^n = \sqrt{1+v^2} - v,$$

подставляя

$$\sqrt{1+v^2} - v = s,$$

получим

$$\sqrt{1+y^2} - y = s^{\frac{1}{n}}$$

или

$$1 + y^2 = s^{\frac{2}{n}} + 2ys^{\frac{1}{n}} + y^2,$$

ввиду чего, уничтожая в обеих частях y^2, будем иметь

$$2ys^{\frac{1}{n}} = 1 - s^{\frac{2}{n}}$$

---

[1]) В самом деле, в равнобочной гиперболе, отнесенной к асимптотам, ординаты обратно пропорциональны абсциссам, т. е.

$$\frac{AP}{EQ} = \frac{CQ}{CP},$$

откуда

$$\frac{AP \cdot CP}{2} = \frac{EQ \cdot CQ}{2},$$

т. е.

$$\text{площ. } \Delta APC = \text{площ. } \Delta CEQ;$$

отняв от обеих частей уравнений площ. ΔCOP, получаем

$$\text{площ. } \Delta AOC = \text{площ. трапеции } OEQP;$$

прибавив к обеим частям уравнения площ. AOE, получаем

$$\text{площ. } ACE = \text{площ. } APQE,$$

что и требовалось доказать.

Так же докажем, что площ. ACH = площ. $APSH$. [*С. Л.*]

[2]) Площ. $APQE$ равна (если взять за оси координат асимптоты)

$$\int_{CP}^{CQ} y\,dx = \int_{CP}^{CQ} \frac{1}{x}\,dx \text{ (уравнение гиперболы } xy = 1) =$$

$$= lx\Big]_{CP}^{CQ} = lCQ - lCP = l\frac{CQ}{CP} = l\frac{AP}{EQ} = l\frac{AC}{EF} = l\frac{1}{EF}.$$

Так же найдем площ. $APSH$. [*С. Л.*]

или

$$2y=\frac{1}{s^{\frac{1}{n}}}-s^{\frac{1}{n}},$$

и будет

$$y=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{\sqrt{1+v^2}-v}}-\frac{1}{2}\sqrt[n]{\sqrt{1+v^2}-v}.$$

Далее, как раньше я подставил $\sqrt{1+v^2}-v=s$ или $s^2+2sv=1$, так, сверх того, я еще подставил

$$\sqrt{1+y^2}-y=z \quad \text{или} \quad z^2+2zy=1.$$

На основании доказанного выше $s=z^n$, поэтому, подставив z^n вместо количества s, я получил следующие два уравнения:

$$z^{2n}+2z^nv=1,$$
$$z^2+2zy=1,$$

или

$$v^2=\frac{1-2z^{2n}+z^{4n}}{4z^{2n}}$$

и

$$y^2=\frac{1-2z^2+z^4}{4z^2}.$$

Затем, когда я радиусом $CA=1$ (рис. 3) из центра C описал круг AE, а затем из точки E опустил перпендикуляр ED к радиусу, мне пришло на ум следующее:

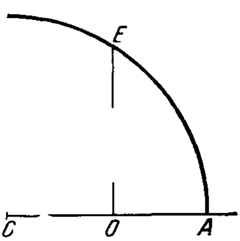

Рис. 3

уравнение круга есть

$$CAq-CDq=DEq\ ^{1)},$$

уравнение равнобочной гиперболы

$$CDq-CAq=+DEq\ ^{2)}.$$

Я решил, что не надо ничего иного, как переменить знаки квадратов v^2 и y^2; проделав это, я получил два уравнения для круга, а именно,

$$-v^2=\frac{1-2z^{2n}+z^{4n}}{4z^{2n}}$$

и

$$-y^2=\frac{1-2z^2+z^4}{4z^2}$$

или

$$1-v^2=\frac{1+2z^{2n}+z^{4n}}{4z^{2n}}$$

---

[1]) То есть $CA^2-CD^2=DE^2$ (или $r^2-x^2=y^2$, т. е. в данном случае $1-v=y^2$). [*С. Л.*]

[2]) То есть $CD^2-CA^2=DE^2$ (или $x^2-r^2=y^2$, т. е. в данном случае $v^2-1=y^2$). [*С. Л.*]

и

$$1-y^2=\frac{1+2z^2+z^4}{4z^2},$$

где v означает синус какой угодно дуги, а y — синус другой дуги, относящейся к первой, как 1 к n, так как дуги в одном и том же круге пропорциональны площадям секторов. Положив $1-v^2=l^2$ и $1-y^2=x^2$, я получил

$$l^2=\frac{1+2z^{2n}+z^{4n}}{4z^{2n}}$$

и

$$x^2=\frac{1+2z^2+z^4}{4z^2},$$

а затем, по извлечении корня, я получил уравнения для косинуса:

$$l=\frac{1+z^{2n}}{2z^n}$$

и

$$x=\frac{1+z^2}{2z}.$$

Из первого из этих уравнений я вывел

$$z=\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}},$$

из второго

$$x=\frac{\frac{1}{2}}{z}+\frac{1}{2}z,$$

и таким путем я, наконец, пришел к выводу, что

$$x=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}}+\frac{1}{2}\sqrt[n]{l+\sqrt{l^2-1}}».$$

Если Моавр в своем исследовании вовсе как бы не замечает, что полученный им результат мнимый, ибо $\sqrt{l^2-1}=\sqrt{\cos^2 B-1}$ никогда не может быть действительным числом, то Ив. Бернулли уже обратил главное внимание на эту сторону проблемы. Он, как и значительная часть его предшественников и современников, держался того мнения, что уравнение, приводящее к мнимым корням, бессмысленно. Эти величины применяли с величайшей осторожностью: лишь тогда считали несомненной правильность теоремы, доказанной с помощью мнимых чисел, если она могла быть выведена другим путем.

В сочинении «Angulorum arcuumque sectio indeterminata per formulam universalem expressa sine serierum auxilio», Opera omnia, т. 1, стр. 511 и след., Ив. Бернулли выводит для тангенсов формулы, аналогичные формулам Моавра для синусов и косинусов:

$$(\operatorname{tg}\varphi-\sqrt{-1})^{2n+1}(\operatorname{tg}n\varphi+\sqrt{-1})=(\operatorname{tg}\varphi+\sqrt{-1})^{2n+1}(\operatorname{tg}n\varphi-\sqrt{-1}),$$

$$(\operatorname{tg}\varphi-\sqrt{-1})^{2n}(\operatorname{ctg}n\varphi-\sqrt{-1})=(\operatorname{tg}\varphi+\sqrt{-1})^{2n}(\operatorname{ctg}n\varphi+\sqrt{-1})$$

(мы несколько модернизировали символику Бернулли). Бернулли предпочел эти формулы другим потому, что они всегда позволяют выразить $\operatorname{tg} n\varphi$ как *вещественную* функцию $\operatorname{tg}\varphi$. [*С. Л.*]

30. (К § 138.) Эти знаменитые формулы для $\cos v$ и $\sin v$, которые ввиду того, что их окончательно сформулировал и доказал Эйлер, до сих пор носят название *формул Эйлера*, впервые выведены в исследовании «Da summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum», *Miscellanea Berolin.*, 7, 1743, стр. 172 (Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 14). Уже раньше в переписке с Хр. Гольдбахом Эйлер сообщил ему об относящихся сюда формулах, частью для частных случаев, частью для общих. Так, в письме от 9 декабря 1741 г. содержится такая формула:

$$\frac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}=\cos\cdot\operatorname{arc}\cdot l2,$$

а в письме от 8 мая 1742 г. такая:

$$a^{p\sqrt{-1}}+a^{-p\sqrt{-1}}=2\cos\cdot\operatorname{arc}\cdot pla.$$

См. «Correspondance math. et. phys., publiée par P. H. Fuss», С.-Петербург, 1843, т. I, стр. 110 и 123 (Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 3). Ср. также статью, цитированную в примечании [5] к § 90 (прежде всего, § 90 и 91 этой статьи). [*А. К.*]

На экземпляре «Introductio», принадлежавшем сыну Л. Эйлера И. А. Эйлеру и находящемся ныне в библиотеке Академии наук СССР, имеется такая приписка на полях к этому месту: «Пусть $e^v=y$. Тогда

$$\cos v=\cos ly=\frac{1}{2}y^{\sqrt{-1}}+\frac{1}{2}y^{-\sqrt{-1}}$$

или

$$ly=\arccos\left(\frac{1}{2}y^{\sqrt{-1}}+\frac{1}{2y^{\sqrt{-1}}}\right)»,$$

т. е. из этой формулы непосредственно вытекает связь между логарифмами и обратной круговой функцией мнимого аргумента. [*С. Л.*]

31. (К § 139.) Замена n на $\frac{1}{i}$ (на бесконечно малое число) совершенно неправомерна, так как формулы для $\sin nz$ и $\cos nz$ были выше выведены таким путем, который годится только при целом и положительном n. [*С. Л.*]

32. (К § 140.) Содержащийся в этом параграфе ряд

$$z=\frac{t}{1}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\text{и т. д.}$$

был найден впервые Дж. Грегори и в письме от 15 февраля 1671 г. сообщен Коллинсу. См. «Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi promota etc., publiée par J. B. Biot et F. Lefort», Paris, 1856, стр. 79. Ряд для $\operatorname{arctg} t$ был найден Грегори в таком виде:

$$a=t-\frac{t^3}{3r^2}+\frac{t^4}{5r^4}-\frac{t^7}{7r^6}+\ldots,$$

где как r — радиус, a — дуга, так и t — тангенс *линии*. Эйлер же первый ввел вместо тригонометрических *линий* их *отношения* к радиусу и, таким образом, впервые стал оперировать с тригонометрическими *функциями*. Ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

опубликован Лейбницем, De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa, *Acta erud.*, 1682, p. 41. В письмах Лейбниц приводил этот ряд за восемь лет до того. См. письма к Лейбницу: Гюйгенса — от 6 ноября 1674 г., Ольденбурга — от 12 апреля 1675 г. (Leibnitz, Mathematische Schriften, I отд., т. 2, Берлин, 1850, стр. 16; I отд., т. 1, Берлин, 1849, стр. 60); сам же Лейбниц в письме к Ольденбургу от 27 августа 1676 г. («Mathematische Schriften», I отд., т. 1, Берлин, 1849 г., стр. 114) пишет:

«А следовательно, если принять за единицу описанный квадрат, круг будет равен

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Это выражение, сообщенное мною друзьям уже три года назад или более того, несомненно самое простое из всех возможных» [1]. [*А. К.*]

Однако последнее замечание Лейбница не совсем верно: для практических вычислений этот ряд неудобен вследствие недостаточно быстрой сходимости. Уже в 1706 г. Дж. Мэчин (J. Machin) нашел значительно более удобный практически ряд (в книге W. Jones, «Synopsis palmariorum matheseos...», 1706):

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \ldots\right),$$

позволивший ему быстро вычислить π со 100 знаками.

Формула

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1+\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\, z}{1-\sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\, z},$$

устанавливающая связь между логарифмом мнимого числа и арктангенсом, также не являлась новостью.

Переход от арктангенса к логарифму был осуществлен уже Ив. Бернулли в 1702 г. (Opera..., 1, стр. 339—400).

Исходя из факта, что

$$\frac{a}{b^2 - z^2}\, dz$$

преобразуется в

$$\frac{a}{2tb}\, dt$$

при

$$z = \frac{(t-1)\,b}{t+1},$$

[1] См. Ф. Рудио, «Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр. О квадратуре круга», перев. прив.-доц. С. Бернштейна, Одесса, 1911, стр. 40—41, 44—48.

он получил в результате преобразования, что

$$\frac{a}{b^2+z^2}\,dz=\frac{a}{2bt\sqrt{-1}}\,dt$$

при

$$z=\frac{(t-1)\,b}{t+1}\sqrt{-1}\,.$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получим в левой арктангенс, в правой — логарифм мнимого числа. [*С. Л.*]

32bis. (К § 142.) Эйлер во многих своих работах рассматривал вопрос о представлении числа π бесконечными рядами, бесконечными произведениями, бесконечными непрерывными дробями и вопрос о соответствующих аналитических зависимостях. Все это потребовало бы слишком много места и мы укажем только на главы X, XI, XV, XVIII этого тома и на работы 41, 59, 61, 63, 72, 74, 125, 130, 275, 561, 664, 705, 706, 745, 809 по списку Энестрема. [*А. К.*]

33. (К § 156.) Чтобы выпуклее подчеркнуть особенности «предельного метода» Эйлера, переведем его выкладки на привычные нам обозначения, заменив i на ∞.

Полученное им выражение

$$\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{n}+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\cdots$$

имеет $\frac{n}{2}$ множителей, значит, при $n=\infty$ выражение

$$\left(1+\frac{x}{\infty}+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{\infty}+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x}{\infty}+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\cdots$$

имеет $\frac{\infty}{2}$ сомножителей. Хотя $\frac{x}{\infty}=0$, тем не менее вычеркнуть просто эти члены нельзя, так как в окончательном результате $\frac{x}{\infty}$ умножается на $\frac{\infty}{2}$, и, следовательно, зачеркивание этих членов приведет к конечной ошибке, равной

$$\frac{x}{\infty}\cdot\frac{\infty}{2}=\frac{x}{2}\,.$$

«Для избежания этого неудобства» (ad hoc incommodum vitandum) Эйлер прибегает к другому способу разложения и получает множитель

$$1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}-\frac{x^2}{\infty^2}\,.$$

Здесь можно слагаемое $\frac{x^2}{\infty^2}$ спокойно зачеркнуть, так как даже при умножении на бесконечность этот член дает нуль:

$$\frac{x^2}{\infty^2}\cdot\infty=\frac{x^2}{\infty}=0$$

(quia, etsi per i multiplicetur, tamen manet infinite parvus!). [*С. Л.*]

34. (К § 162.) «Если помножить вторую формулу на третью» — необходимая поправка, внесенная в текст (без всяких оговорок) Рудио и Крацером; у Эйлера ошибочно написано: «если помножить вторую

формулу на четвертую» (si secunda forma per quartam multiplicetur), о чем Рудио и Крацер не упоминают. [*С. Л.*]

35. (К § 166.) Эти формулы, которые Эйлер обыкновенно называл *формулами Ньютона*, дал в своей книге (до 4-й степени) А. Жирар в 1629 г. (A. Girard, «Invention nouvelle en l'algébre», Амстердам, 1629; перепечатано D. Bierens de Haan, Лейден, 1884). См. также: Ньютон, «Arithmetica universalis», Кембридж, 1707, стр. 251; 3-е изд., Лейден, 1732, стр. 192. Доказал эти равенства Эйлер в статье «Demonstratio gemina theorematis Neutoniani, quo traditur relatio inter coefficientes cuiusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum eiusdem», Opuscula varii argumenti, 2, 1750, стр. 108; Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 6, стр. 20 (см. примечание на стр. 20—22). [*А. К.*]

36. (К § 167.) Замечательную формулу

$$P=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}$$

Эйлер уже в 1736 г. сообщил в письме Дан. Бернулли. См. письмо Бернулли к Эйлеру от 12 сентября 1736 г. («Correspondance math. et phys., publiée par P. H. Fuss» С.-Петербург, 1843, т. II, стр. 433). Ср. статьи G. Eneström, «Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés. Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann J. Bernoulli. Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Daniel Bernoulli», *Bibliotheca Mathematica*, 2-я серия, 4, 1890, стр. 22; 3-я серия, 5, 1904, стр. 248; 7,1906—1907, стр. 126. См. также статьи Эйлера «De summis serierum reciprocarum», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 7 (1734/35), 1740, стр. 123; «Démonstration de la somme de cette suite: $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$etc.», *Journal littéraire d'Allemagne*, 2, 1, 1743, стр. 115; «De seriebus quibusdam considerationes», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 12 (1740), 1750, стр. 53. По поводу статьи «Démonstration...» см. P. Stäckel, Eine vergessene Abhandlung Leonhard **Eulers** über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen, *Biblioth. Mathem.*, 3-я серия, 8, 1907—1908, стр. 37. [*А. К.*]

37. (К § 168.) Наряду с другими ингредиентами в эти выражения входят коэффициенты $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{691}{105}$ и т. д. — как замечает Эйлер, образующие ряд, на первый взгляд чуждый всякой закономерности (perquam irregularis), но очень полезный. Однако же, как впоследствии заметил сам Эйлер («Institutiones calculi differentialis», С.-Петербург, 1755, ч. II, гл. V, § 119—121; в русском переводе: Эйлер, «Дифференциальное исчисление», М. — Л., 1937), этот ряд коэффициентов для сумм степеней дробей, знаменателями которых являются последовательные числа, подчиняется определенной закономерности и, с другой стороны, функционально связан со столь же с виду неправильным рядом коэффициентов для сумм степеней последовательных чисел, так называемыми *числами Бернулли*. Как говорит Эйлер в указанном месте, надо написать

ряд чисел по такому закону:

$$A=\frac{1}{12};$$
$$B=\frac{A^2}{5},$$
$$C=\frac{2AB}{7},$$
$$D=\frac{2AC+B^2}{9},$$
$$E=\frac{2AD+2BC}{11},$$
$$F=\frac{2AE+2BD+C^2}{13},$$
$$G=\frac{2AF+2BE+2CD}{15}$$

и т. д.,

так что каждый раз в числителе берется произведение двух крайних предыдущих членов, к нему прибавляется произведение второго и предпоследнего, затем третьего и третьего с конца и т. д., пока не исчерпаются все предыдущие члены, причем ко всем слагаемым, кроме квадратного, приписывается коэффициент 2, а знаменатель k-го члена берется равным $2k+1$; тогда интересующие нас коэффициенты a, b, c, d и т. д. будут зависеть от A, B, C, D и т. д. следующим образом:

$$a=2\cdot 1\cdot 2\cdot 3A,$$
$$b=2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5B,$$
$$c=2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7C,$$
$$d=2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots 9D$$

и т. д.

Числа Бернулли ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ и т. д.) представляют собой коэффициенты последних членов в развернутом выражении для сумм четных степеней последовательных чисел (S_{n^2} — сумма квадратов, S_{n^3} — сумма кубов и т. д.):

$$S_{n^2}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n \qquad \left(\mathfrak{A}=\frac{1}{6}\right),$$
$$S_{n^4}=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n \qquad \left(\mathfrak{B}=-\frac{1}{30}\right),$$
$$S_{n^6}=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n \qquad \left(\mathfrak{C}=\frac{1}{42}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_{n^c}=\frac{n^{c+1}}{c+1}+\frac{n^c}{2}+\frac{c}{2}\mathfrak{A}n^{c-1}+\frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4}\mathfrak{B}n^{c-3}+$$
$$+\frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\mathfrak{C}n^{c-5}+\ldots,$$

где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ и т. д. всегда легко найти, так как сумма всех коэффициентов каждого выражения всегда равна единице[1]).

Между эйлеровыми коэффициентами для рядов обратных степеней (a, b, c, d, ...) и числами Бернулли ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ...) существует,

[1]) Jac. Bernoulli, Ars conjectandi (написана в 1679—1685 гг.), ч. II, гл. VII, стр. 96 и след.

как показал сам Эйлер в указанном месте «Institutiones calculi differentialis», такая зависимость:

$$\frac{a}{\mathfrak{A}}=2\cdot 3;\quad \frac{b}{\mathfrak{B}}=2\cdot 5;\quad \frac{c}{\mathfrak{C}}=2\cdot 7;\quad \frac{d}{\mathfrak{D}}=2\cdot 9 \text{ и т. д.}$$

Этому же вопросу посвящены специальные работы Эйлера: «De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera», *Miscellanea Berolinensia*, 7, 1743, стр. 172, и «De summatione serierum in hac forma contentarum

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\ldots \text{etc.»},$$

Mém. d. l'acad. d. sc. de St.-Petersbourg, 3 (1809/10) 1811, стр. 26; Leonhardi Euleri Opera postuma, 1, Petropoli, 1862, стр. 519.

Слова первого издания «potestatum ipsius π exponentes» — «показатели степеней π», сохранены и в новом издании Рудио и Крацера и в обоих изданиях французского перевода Labey. Между тем это явная описка, исправленная от руки в указанном выше личном экземпляре И. А. Эйлера: вместо exponentes — «показатели», надо, разумеется, читать coefficientes — «коэффициенты». [*С. Л.*]

38. (К § 182.) В конце второй формулы Рудио и Крацер вносят (без всяких оговорок) необходимую поправку $\frac{\pi}{2p\operatorname{tg} p\pi}$, не упоминая о том, что у Эйлера ошибочно читалось $\frac{\pi}{2p\sin p\pi}$. [*С. Л.*]

39. (К § 185.) Валлис («Arithmetica infinitorum», Оксфорд, 1656, 107, 180—181; «Opera mathematica», стр. 426—427 и след., 469) получает для $\frac{\pi}{2}$ такое же значение:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\ldots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\ldots},$$

но он исходит при этом из соображений интеграционного характера. Рассматривая площадь полукруга как сумму всех ординат, он приходит к выражению, которое на языке наших символов представится в виде

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Это выражение он рассматривает как частный случай выражения

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{s}}\right)^{\frac{r}{2}} dx$$

при $s=1$, $r=1$. Подставляя вместо s и r ряд последовательных четных чисел, он получает ряд, закон которого ему удается установить и который при бесконечном увеличении числа членов стремится к ряду для $s=1$, $r=1$. [*С. Л.*]

40. (К § 188.) Формула

$$\frac{\pi}{2}=2\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right) \text{ и т. д.}$$

представляет собой лишь преобразование вновь выведенной Эйлером в § 185 формулы Валлиса

$$\frac{\pi}{2}=2\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{4\cdot6}{5\cdot5}\cdot\frac{6\cdot8}{7\cdot7}\cdot\frac{8\cdot10}{9\cdot9}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\cdots$$

(n пробегает все нечетные числа). В самом деле, так как

$$\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n^2-1}{n^2}=1-\frac{1}{n^2},$$

то

$$\frac{\pi}{2}=2\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{49}\right) \text{ и т. д.}$$ [*С. Л.*]

41. (К § 211.) Термин «рекуррентные ряды» впервые введен А. Моавром в его статье «De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus», *Philosophical transactions* (London), 32 (1722/3), 1724, стр. 176, сдано в печать уже в 1720 г. Здесь и в «Miscellanea analytica» (см. ниже примечание [[47]]) Моавр дает такое определение рекуррентного ряда:

«Если какой-либо ряд так составлен, что если взять произвольно несколько первых членов, то каждый последующий всегда имеет данную зависимость от такого же числа предыдущих, то такой ряд я называю рекуррентным. Числовые же количества, взятые вместе и соединенные их собственными знаками, составляют индекс или шкалу отношения», т. е.

$$k_{i+n+1}=Ak_{i+n}+Bk_{i+n-1}+Ck_{i+n-2}+\ldots+Qk_i,$$

где индекс отношения составлен из n коэффициентов

$$A,\ +B,\ +C,\ \ldots,\ +Q.$$

Ср. также книгу Моавра «The doctrine of chances», Лондон, 1718, стр. 127—134. [*С. Л.*]

42. (К § 214.) Ср. статью Эйлера «De seriebus quibusdam considerationes», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 12 (1740), 1750, стр. 53 и след.; особенно стр. 61 (Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 14). [*Ф. Р.*]

43. (К § 224.) Знаменатель дроби, см. § 63. Шкала отношения, см. примечание [[41]] (к § 211). [*С. Л.*]

44. (К § 225.) В первом издании вместо

$$[(\mathfrak{A}(n+1)+\mathfrak{B})\,p^n+\mathfrak{C}r^n]\,z^n$$

было

$$[(\mathfrak{A}n+\mathfrak{B})\,p^n+\mathfrak{C}r^n]\,z^n;$$

вместо

$$\left(\mathfrak{A}\,\frac{(n+1)\,(n+2)}{1\cdot2}+\mathfrak{B}\,(n-1)+\mathfrak{C}\right)p^nz^n$$

было

$$(\mathfrak{A}n^2+\mathfrak{B}n+\mathfrak{C})\,p^nz^n.$$

[*Ф. Р.*]

45. (К § 228.) Решение

$$X=\frac{(\beta A-\alpha B)P^2+2BPQ-AQ^2}{B^2-\alpha AB+\beta A^2}$$

можно было получить непосредственно из первого уравнения для X, подставляя из § 227

$$\beta^n=\frac{Q^2-\alpha PQ+\beta P^2}{B^2+\alpha AB+\beta A^2}. \qquad [Ф.\ Р.]$$

46. (К § 230.) Даваемое здесь уравнение (proportio) можно получить, находя значения выражений $\mathfrak{A}p^n$, $\mathfrak{B}q^n$, $\mathfrak{C}r^n$ из уравнений

$$\mathfrak{A}p^n+\mathfrak{B}q^n+\mathfrak{C}r^n=P,$$
$$\mathfrak{A}p^np+\mathfrak{B}q^nq+\mathfrak{C}r^nr=Q,$$
$$\mathfrak{A}p^np^2+\mathfrak{B}q^nq^2+\mathfrak{C}r^nr^2=R;$$

сходным образом можно найти и значения количеств $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ из соответствующих уравнений

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=A,$$
$$\mathfrak{A}p+\mathfrak{B}q+\mathfrak{C}r=B,$$
$$\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2=C.$$

Умножая решения друг на друга, получим

$$[Pqr-Q(q+r)+R][Prp-Q(r+p)+R][Ppq-Q(p+q)+R]:$$
$$:[Aqr-B(q+r)+C][Arp-B(r+p)+C][Apq-B(p+q)+C]=$$
$$=p^nq^nr^n:1=\gamma^n:1.$$

Это уравнение, будучи развернуто по степеням R и C, дает, если принять во внимание зависимости $p+q+r=\alpha$, $qr+rp+pq=\beta$, $pqr=\gamma$, указанную пропорцию. [*Ф. Р.*]

47. (К § 231.) Сумму членов рекуррентного ряда нашел уже Моавр в «Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis», Лондон, 1730, стр. 72 (кн. IV, гл. I: «De summis serierum recurrentium»). Моавр начинает с бесконечных рекуррентных рядов; то, что весь расчет может иметь смысл лишь тогда, когда ряд сходится (так как только тогда $Q+R+$ $+S+\ldots$ и $P+Q+R+\ldots$ в правой части имеют пределами $z-P$ и z с таким же z, что и в ряде $P+Q+R+\ldots$, в левой части), нисколько не затрудняет Моавра. Даю перевод его решения:

«Дан какой угодно рекуррентный ряд

$$a+bx+cx^2+dx^3+\text{ и т. д.},$$

причем шкала отношения есть $f-g$; найти сумму такого ряда, продолженного до бесконечности.

Расположим члены ряда вместе со связанными с ними уравнениями в том же порядке, в котором располагают обычно числа, соединяемые в сумму, именно так:

$$P=P,$$
$$Q=Q,$$
$$R=fQx-gPx^2,$$
$$S=fRx-gQx^2,$$
$$T=fSx-gRx^2$$
и т. д.

После этого, если положить бесконечную сумму членов P, Q, R, S, T и т. д., из которых составлен первый столбец, равной z, тогда суммы следующих столбцов обозначатся следующим образом: по принятому нами $P+Q+R+S+T+$ и т. д. $=z$, следовательно, будет $Q+R+$ $+S+T+$ и т. д. $=z-P$; умножим все это на fx; отсюда получим $fQx+fRx+fSx+fTx+$ и т. д. $=fxz-fPx$; прибавив к обеим частям по $P+Q$, получим, что сумма второго столбца, т. е. $P+Q+fQx+$ $+$ и т. д. $=P+Q+fxz-fPx$; сумма же третьего столбца, как это ясно сразу, должна быть обозначена $-gx^2z$, откуда

$$z=P+Q+fxz-fPx-gx^2z$$

или

$$z=\frac{P+Q-fPx}{1-fx+gx^2}=\frac{a+bx-fax}{1-fx+gx^2}\text{». } [C.\ Л.]$$

48. (К § 232.) Таким путем находил сумму определенного числа членов рекуррентного ряда уже Моавр, см. «Miscellanea analytica», Problema III.

«Даст рекуррентный ряд, равный данному», — выражение неточное, — Эйлер должен был бы вместо aequalem сказать similem, т. е. «подобный», «одинаково составленный». [*С. Л.*]

49. (К § 237.) Перенеся все члены уравнения § 236 в первую часть:

$$0=\sin nz-nx+\frac{n(n^2-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3-\ldots \tag{1}$$

и поделив обе части уравнения на $\sin nz$, получим

$$0=1-\frac{nx}{\sin nz}+\frac{n(n^2-1)x^3}{1\cdot 2\cdot 3\sin nz}-\ldots\pm\frac{2^{n-1}x^n}{\sin nz}. \tag{2}$$

Это уравнение разлагается на множители

$$\left(1-\frac{x}{\sin z}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)}\right)\left(1-\frac{x}{\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)}\right) \text{ и т. д.}$$

Коэффициент при x в уравнении (2), т. е. $\frac{n}{\sin nz}$, равен сумме вторых слагаемых всех множителей, а последний член этого уравнения — их произведению.

Корни уравнения (1) суть

$$\sin z,\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right),\ \sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right) \text{ и т. д.},$$

а потому коэффициент члена, имеющего степень на единицу ниже высшей, должен равняться их сумме. Но так как уравнение содержит только нечетные степени x, то этот коэффициент равен нулю, откуда

$$0=\sin z+\sin\left(\frac{2\pi}{n}+z\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{n}+z\right)+\ldots+ \text{ и т. д.}$$

Таков же ход рассуждения и в дальнейших параграфах. [*С. Л.*]

50. (К § 243.) Здесь Эйлер забыл отметить особенность выражений для $\cos nz$ в том случае, когда z нечетное:

$$\begin{aligned} \cos 1z &= \phantom{16y^5 - 20y^3 +{}} 1y, \\ \cos 3z &= \phantom{16y^5 -{}} 4y^3 - 3y, \\ \cos 5z &= 16y^5 - 20y^3 + 5y, \\ \cos 7z &= 64y^7 - \ \ldots \ - 7y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos nz &= \ldots \pm ny, \end{aligned}$$

где берется знак плюс, когда число на единицу больше кратного четырем, и знак минус — в противном случае.

Этим свойством Эйлер пользуется в § 246. [*С. Л.*]

51. (К § 245.) «Четно-четное» число (numerus pariter par) — число, кратное четырем; «нечетно-четные» (numeri impariter pares) — все остальные четные числа. [*С. Л.*]

52. (К § 246.) См. примечание [50] (к § 243); указанное в этом примечании выражение для $\cos nz$ надо преобразовать, перенеся в одну сторону и разделив на $\cos nz$ (см. все сказанное в примечании [49] к § 237). [*С. Л.*]

53. (К § 270.) То, что A равно сумме α, β, γ, δ, ε и т. д., взятым по одному, B равно сумме множителей из этих количеств, взятых по два, и т. д. — Эйлер называет «очевидным» (manifestum est). Надо думать, что прав М. Кантор и что Эйлер имел в виду то, что эти результаты без труда получаются путем последовательных делений на отдельные множители знаменателя:

$$1 : (1 - \alpha z) = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \ldots,$$
$$(1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \ldots) : (1 - \beta z) = 1 + (\alpha + \beta) z + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) z^2 + \ldots$$

и т. д.

Дальше оставалось только применить метод неполной индукции. [*С. Л.*]

54. (К § 287.) $\frac{\pi^6}{960}$ получено путем деления обеих частей уравнения на $\frac{2^6}{2^6-1} = \frac{64}{63}$. [*С. Л.*]

55. (К § 288.) Имеем

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \text{ и т. д.} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{7}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{11}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{13}} \cdot \text{ и т. д.};$$

умножая обе части на $\frac{2}{3} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}$, получаем

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \text{ и т. д. [С. Л.]}$$

56. (К § 295.) Дословно: «Знаменатели четно-четные тогда, когда они отличаются на единицу от числителя». Удивительно, что это выражение не затруднило ни редакторов последнего издания Рудио и Крацера, ни переводчика Labey. В самом деле, в разбираемом выражении *все* знаменатели отличаются от своих числителей на единицу, а не только четно-четные.

Формула для $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ получена путем *деления* обеих частей равенства

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{3\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{5\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{7\cdot7}{6\cdot8}\cdot\frac{11\cdot11}{10\cdot12}\cdot\frac{13\cdot13}{12\cdot14}\cdot \text{ и т. д.}$$

на соответственные части равенства

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{16}\cdot \text{ и т. д. } [С.\ Л.]$$

57. (К гл. XVI.) Ср. с этой главой статьи Эйлера «Observationes analyticae variae de combinationibus», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 13 (1741/3), 1751, стр. 64; «De partitione numerorum», *Novi comment. acad. sc. Petrop.*, 3 (1750/1), 1753, стр 125; «De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas», *Novi comment. acad. sc. Petrop.*, 14 (1769), I, 1770, стр. 168 (Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 2, стр. 163 и 254, см. также предисловие к т. 2, стр. XVIII—XX; т. 3, стр. 131, см. также предисловие к т. 3, стр. XIX и XX).

См., далее, письмо Ph. Naudé младшего к Эйлеру от 27 августа 1740 г. (будет напечатано в III серии Opera omnia). В этом письме Ноде предложил Эйлеру следующие две задачи:

Найти, сколькими различными способами данное число может быть получено путем сложения между собой нескольких неравных целых чисел, число которых дано.

Найти, сколькими различными способами данное число m может быть разбито на μ частей как равных, так неравных, или найти, сколькими различными способами может быть получено данное число m путем сложения между собой μ целых, равных или не равных друг другу чисел.

Решение этих задач Эйлер и дал впервые в первой из указанных выше статей. [*Ф. Р.*]

58. (К § 301.) Дословно: «так как число членов не определяется, то отсюда не исключается и единица», т. е. и тот случай, когда число слагаемых равно единице, т. е. в данном случае 8=8 также считается одним из способов получения числа 8 путем сложения. [*С. Л.*]

59. (К § 318.) Сравни соответствующую таблицу, содержащуюся в первой из статей, перечисленных в примечании [57] к гл. XVI; в этой же статье, в § 33, очень отчетливо объяснено, каким образом можно составить эту таблицу только с помощью сложений. [*Ф. Р.*]

60. (К таблице, приложенной к § 318.) В этой таблице каждый вертикальный ряд дает значения последовательных коэффициентов степенных рядов для выражений P, Q, R, S, T и т. д., выведенных в § 306 (исключая коэффициент первого члена). [*С. Л.*]

61. (К § 319.) «С числами натуральными, треугольными, пирамидальными и последующими», т. е. с пирамидальными числами высших

порядков, из которых каждое есть сумма последовательных чисел предыдущего порядка, если начинать каждый раз с единицы [*С. Л.*]

62. (К § 320—321.) Рассуждая как в предыдущем параграфе, сначала умножим $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ на $1+x+x^2$, а затем результаты на $1+x$. После выполнения первого умножения получим выражение, в котором каждый член представляет собой сумму трех членов, а его коэффициент — сумму трех последовательных членов числового ряда. Когда мы теперь умножим результат на $1+x$, каждый член будет представлять сумму двух новых членов, а его коэффициент — сумму двух последовательных членов нового числового ряда и т. д. Но

$$\frac{(1+x)(1+x+x^2)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}=\frac{1}{(1-x)^3},$$

$$\frac{(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}=\frac{1}{(1-x)^4}$$

и т. д.,

а достаточно развернуть знаменатели выражений $\frac{1}{(1-x)^n}$ и затем произвести деление, чтобы убедиться, что коэффициенты получающихся рядов суть пирамидальные числа соответствующего порядка. [*С. Л.*]

63. (К § 322.) Если обозначим члены в каждой группе:

$$\begin{array}{ll} \text{1-го ряда} & a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots, \\ \text{2-го ряда} & b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ \ldots, \\ \text{3-го ряда} & c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ \ldots, \\ \text{4-го ряда} & d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5,\ \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

то между n-ми членами каждого ряда существует такая зависимость:

II группа:

$$b_n=a_n-b_{n-1};$$

III группа:

$$b_n=a_n-b_{n-1},$$
$$c_n=b_n-(c_{n-1}+c_{n-2});$$

IV группа

$$b_n=a_n-b_{n-1},$$
$$c_n=b_n-(c_{n-1}+c_{n-2}),$$
$$d_n=c_n-(d_{n-1}+d_{n-2}+d_{n-3})$$

и т. д. [*С. Л.*]

64. (К § 323.) Эта знаменитая формула впервые встречается у Эйлера в его исследовании «Observationes analyticae variae de combinationibus», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 13 (1741/3), 1751, стр. 64, доложенном академии уже 6 апреля 1741 г. Доказательство ее Эйлер дал в сочинении «Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum», *Novi comment. acad. sc. Petrop.*, 5 (1754/5), 1760, стр. 76 и след. (Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 2, стр. 390).

Этот ряд потому заслуживает особенного внимания, что он является одной из тех функций, которые почти 100 лет спустя ввел в анализ К. Г. Якоби в качестве основ теории эллиптических функций, назвав их ϑ-функциями, ср. C. G. J. J a c o b i, «Elementarer Beweis einer merkwürdigen analytischen Formel...», *Journal f. d. reine u. angewandte Mathem.*, 21, стр. 13, 1840 (Gesammelte Werke, 6, 1891, стр. 281 и след.).

Эйлерова формула

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-\ldots$$

содержится и в книге Якоби «Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum», Кенигсберг, 1829, § 66, формула (6) (Gesammelte Werke, I, 1881, стр. 237 и след.).

Следует также отметить, что ряд, показатели которого составляют арифметическую прогрессию второго порядка, был уже за 60 лет до Эйлера найден Як. Бернулли и Лейбницем, ср. G. E n e s t r ö m, «Jakob Bernoulli und die Jacobischen Thetafunctionen», *Biblioth. Mathem.*, III серия, 9, 1908—1909, стр. 206. Далее, см. примечание к § 36 указанной статьи Эйлера «Observationes analyticae...» (L e o n h a r d i E u l e r i Opera omnia, серия 1, т. 2, стр. 191). [*Ф. Р.*]

65. (К § 329.) Это разъяснял уже Леонардо Пизанский в его «Liber abbaci» (1202), ed. B. Boncompagni, Roma, 1857, стр. 297. См., далее, M. S t i f e l, «Die Coss Christoffs Rudolffs», Кенигсберг, 1553 и Fr. v. S c h o o t e n, «Exercitationum mathematicarum libri quinque», Лейден, 1657, кн. V, гл. VIII, стр. 410. Ср. наконец, G. E n e s t r ö m, «Über die ältere Geschichte der Zerfällung ganzer Zahlen in Summen kleinerer Zahlen», *Biblioth. Mathem.*, III серия, 13, 1912—1913, стр. 352. [*Ф. Р.*]

66. (К § 330.) И это также имеется у Леонардо Пизанского. См. предыдущее примечание. [*Ф. Р.*]

67. (К § 332.) Дан. Бернулли указал способ приближенного нахождения корней уравнений при помощи рекуррентных рядов в своих «Observationes de seriebus recurrentibus», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 3 (1728), 1732, стр. 85—100. Способ этот состоит в следующем.

Сначала приводят уравнение к виду

$$1 = ax + bx^2 + cx^2 + ex^4 + \ldots. + px^{\nu}.$$

Берут ν произвольных чисел $A, B, C, D, \ldots, P$ и затем к ним присоединяют $(\nu+1)$-е:

$$Q = aP + bN + \ldots + nB + pA.$$

Применяя еще раз ту же рекуррентную формулу, получают

$$R = aQ + bP + \ldots + nC + pB$$

и т. д. Если выберем достаточно далеко отстоящие от начала коэффициенты Ψ и Ω, то $\frac{\Psi}{\Omega}$ даст приближенное значение корня уравнения. Практически для упрощения берут $A = B = C = D = 1$.

Эта процедура неприменима, когда уравнение имеет два корня, равных по абсолютной величине, но обратных по знаку; тогда подставляют $x = y \pm \alpha$. Никакого доказательства при этом Бернулли не дает. Это делает впервые Эйлер. [*С. Л.*]

68. (К § 346.) Рудио и Крацер вносят здесь (без всяких оговорок) необходимую поправку «$(n+1)\mathfrak{A}p^n$ по сравнению с $\mathfrak{L}q^n$», не упоминая о том, что у Эйлера ошибочно читалось» $(n+1)\mathfrak{A}p^n$ по сравнению с $\mathfrak{B}q^n$». [*С. Л.*]

69. (К § 351.) Этот результат выведен в следующем параграфе. [*Ф. Р.*]

70. (К § 352.) Рудио и Крацер вносят здесь необходимую поправку $PQp^2\sin(n+2)\varphi\sin(n+2)\varphi$, не упоминая о том, что у Эйлера ошибочно читалось

$$PQp^2\sin(n+1)\varphi\sin(n+2)\varphi.$$ [*С. Л.*]

71. (К гл. XVIII.) Здесь Эйлер излагает результаты своих работ о непрерывных дробях: «De fractionibus continuis», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 9 (1737), 1744, стр. 98, и «De fractionibus continuis observationes», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 11 (1739), 1750, стр. 32.

По вопросу о главных предшественниках Эйлера в этой области — Катальди, Валлисе и Броункере — отсылаю читателя к подробному исследованию: S. Günther, «Storia dello sviluppo della teoria delle frazioni continue fino all'Euler», *Bulletino di bibliografia e storia delle scienze matematiche publ. da B. Boncompagni*, VII, Roma, 1874, 213—254, 451—502, 533—596.

Научное изложение теории непрерывных дробей мы впервые встречаем у Гюйгенса (Huygens, «Descriptio automati planetarum»). Гюйгенс понял уже, насколько удобно, когда числителями непрерывной дроби являются единицы, и пишет непрерывную дробь в виде

$$m+\frac{1}{a+\frac{1}{b+\ddots}}$$

Далее, он находит подходящие дроби. Он отправляется от положения Евклида (V,I): если из двух неравных чисел меньшее раз за разом отнимается от большего и каждый остаток точно измеряет предшествующую ему величину не раньше, чем он становится единицей, то заданные числа не имеют общих множителей. Отсюда Гюйгенс заключает, что числители и знаменатели подходящих дробей не могут иметь общих множителей. Далее Гюйгенс обратил внимание и на то, что нельзя найти дробь с меньшим числителем и знаменателем, чем подходящая, которая была бы ближе этой подходящей к заданной дроби. Наконец, Гюйгенс отмечал, что значения подходящих дробей попеременно то меньше, то больше заданной дроби, на что, впрочем, указал уже со слов Броункера Валлис (в его «Arithmetica infinitorum», Оксфорд, 1655, см. ниже). Но систематически построенную и обоснованную теорию непрерывных дробей дал впервые Эйлер в указанных выше статьях. [*С. Л.*]

72. (К § 362.) Это утверждение, вообще говоря, верно лишь в том случае, когда $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=1$. Так, для $x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{2}}$ подходящими будут дроби

$$\frac{a}{1}=1,\quad \frac{ab+\alpha}{b}=2,\quad \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta}=\frac{7}{5},$$

и первая ближе к истинному значению $\frac{7}{5}$, чем вторая. [*Ф. Р.*]

73. (К примеру 2 § 369.) Знаменитую формулу

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}\quad \text{и т. д.}$$

Броункер дал в письме к Валлису, о чем сообщает последний в своей «Arithmetica infinitorum», Оксфорд, 1655, стр. 182 (Opera mathematica, т. I, Оксфорд, 1695, стр. 355 и след., особенно стр. 469). См. также Leonhardi Euleri Opera omnia, серия 1, т. 1, стр. 507. [*Ф. Р.*]

74. (К примеру 3 § 381.) Разложение в непрерывную дробь

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ldots}}}}\quad \text{и т. д.}$$

Эйлер дал впервые в статье «De functionibus continuis», *Comment. acad. sc. Petrop.*, 9 (1737), 1744, стр. 98 и след. [*Ф. Р.*]

75. (К § 382.) См. J. Wallis, Opera mathematica, т. II, Оксфорд, 1693, гл. 98—99, стр. 418—429. Ср. также гл. 56—61, стр. 232—250. [*Ф. Р.*]

76. (К примеру 1 § 382.) Archimedes Opera, ed. J. L. Heiberg, т. I, Лейпциг, 1880, стр. 257.

Меций (Adrianus Metius) — псевдоним Адриана Антонисзона (Adriaan Antoniszoon), нашедшего π с большой точностью [1]) в книге «Arithmeticae libri duo» и «Geometriae libri VI», Лейден, 1626; см. «Geometriae» часть первая, гл. X. См. книгу Ф. Рудио, указанную в прим. 28. [*Ф. Р.*]

[1]) $\frac{355}{113}=3{,}1415929.$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНЫХ

КНИГА ПЕРВАЯ,

Содержащая разъяснение функций переменных количеств; их разложение на множители, равно как в бесконечные ряды, — вместе с учением о логарифмах, круговых дугах и синусах и тангенсах последних; и вместе со многими другими предметами, в немалой мере полезных для анализа бесконечных.